

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова  
Российской академии наук

*XVII Международная конференция*

**УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

*(конференция Пятницкого)*

3 – 5 июня 2026 г., Москва

**Материалы конференции  
Электронный препринт**

Москва  
ИПУ РАН  
2026

## Содержание

<i>Александров А.Ю.</i> Развитие методов анализа устойчивости позитивных систем . . . . .	10
<i>Ананьев Б.И.</i> Характеристики чувствительности равновесия нелинейных дискретных систем . . . . .	12
<i>Ананьевский И.М.</i> Задача быстрогодействия для двойного линейного обратного маятника . . . . .	16
<i>Андреев А.С., Буранов Ж.И., Хусанов Д.Х.</i> Прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости интегродифференциальных уравнений Вольтерра с цилиндрическим фазовым пространством . . . . .	19
<i>Антоновская О.Г., Бесклубная А.В.</i> Об одном случае стабилизации линейной системы управления по состоянию . . . . .	22
<i>Ардентов А.А.</i> Экстремальные траектории в субримановой задаче для омниколесного робота с одним прицепом . . . . .	25
<i>Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.</i> О необходимых условиях седловой точки . . . . .	28
<i>Арцибасов А.В., Решмин С.А.</i> Модификация закона линейного тангенса для учета нижнего ограничения на положение объекта . . . . .	31
<i>Байков А.Е., Майоров А.Ю.</i> Об устойчивости нижнего равновесия тяжелого двойного маятника, нагруженного следящей силой . . . . .	35
<i>Барabanов И.Н., Тхай В.Н.</i> Параллельная структура агрегирования консервативных систем с колебаниями . . . . .	38
<i>Барактенко Е.А., Маркова Е.В., Прокофьев Е.А., Солoduша П.Ю.</i> Об одной модели развивающихся систем в энергетике . . . . .	41
<i>Барсегян В.Р.</i> Задача управления лазерным воздействием на двухслойный биоматериал с промежуточными условиями . . . . .	43
<i>Барсегян В.Р., Гребнева О.А., Солoduша С.В.</i> Модель задачи граничного управления процессами теплопереноса в трубопроводе системы теплоснабжения . . . . .	47
<i>Беличенко М.В., Петров Н.А.</i> Оценка точности приближенных непрерывных моделей силы трения . . . . .	50
<i>Берлин Л.М.</i> Достаточное условие оптимальности в задаче наискорейшего разгона/остановки несинхронных осцилляторов . . . . .	54

<i>Бирюков Р.С., Бубнова Е.С.</i> Оптимальный обобщенный $\mathcal{H}_2$ -наблюдатель линейной дескрипторной системы . . . . .	57
<i>Бирюков Р.С., Коган М.М.</i> Синтез робастного управления при структурированной неопределенности по априорным и экспериментальным данным . . . . .	60
<i>Болотник Н.Н., Корнеев В.А.</i> Оптимизация параметров противобударного изолятора для защиты объектов на подвижном основании от внешних воздействий прямоугольной формы . . . . .	64
<i>Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю.</i> Управление системой трех взаимодействующих тел в среде с квадратичным сопротивлением при ограничении на расстояния между телами	67
<i>Бортаковский А.С.</i> Оптимальное управление группами подвижных объектов переменного состава . . . . .	71
<i>Буданов В.М., Формальский А.М.</i> Гашение колебаний груза, подвешенного на нерастяжимом тросе к подвижному объекту . . . . .	74
<i>Бурдилова В.В., Крищенко А.П.</i> Положения равновесия и бифуркации в трехмерной модели динамики популяций . .	77
<i>Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С.</i> О движении бусинки на качелях при наличии сухого трения . . . . .	80
<i>Видов Н.М., Кулешов А.С.</i> Эффект трансгрессии в негOLONOMных системах малой размерности . . . . .	83
<i>Влахова А.В., Макиева Э.И.</i> Предельные модели динамики систем с проскальзыванием и разрушением . . . . .	86
<i>Вражеский С.А., Сергеев А.И.</i> Терминальное управление линейными системами с ограничениями по выходной переменной в условиях возмущений . . . . .	89
<i>Гарбуз М.А., Климина Л.А.</i> Бифуркации автоколебательных режимов движения шагающего аппарата с ветротурбиной в потоке среды . . . . .	93
<i>Голованов С.А., Климина Л.А., Самсонов В.А.</i> Максимизация средней скорости робота тримарана с помощью аналитических оценок . . . . .	98
<i>Голубев А.Е.</i> Построение оценок для максимальных абсолютных значений переменных состояния нелинейных динамических систем, замкнутых обратной связью . . . . .	101
<i>Голубев А.Е., Хорошева А.А.</i> Управление движением квадрокоптера на базе оценки вектора состояния наблюдателем	104

<i>Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.</i> Управление перевернутым маятником на колесе без обода . . . . .	107
<i>Грезнев П.П., Краснова С.А.</i> Прямое управление положением конечной точки манипулятора с неопределенными массоинерционными характеристиками . . . . .	111
<i>Гусев М.И.</i> Предельное поведение множеств достижимости с ограничениями на норму управления в пространстве $L_p$ . . . . .	114
<i>Гутник С.А.</i> Исследование устойчивости периодических колебаний системы двух тел в плоскости эллиптической орбиты . . . . .	118
<i>Данг Т.Д., Фуртат И.Б.</i> Алгоритм управления нелинейными объектами с запаздыванием на базе предикторов регулируемой величины и возмущения . . . . .	122
<i>Десяткин Д.Д., Десяткин Е.Д.</i> Построение управления на основе алгоритма обучения с подкреплением для перевернутого маятника . . . . .	126
<i>Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.</i> Оптимизация управления манипулятора с кинематической избыточностью . . . . .	129
<i>Дорофеев С.В., Сухов Е.А.</i> Моделирование динамики управляемого токоприемного устройства электроподвижного состава железной дороги . . . . .	132
<i>Досаев М.З.</i> Оценка внутренних моментов при управлении вибро роботом с дебалансом и маховиком . . . . .	135
<i>Егоров А.В.</i> Критерий Ляпунова для систем с запаздыванием: вычислительная эффективность вместо общности . . . . .	139
<i>Елсаков А.П., Проскурников А.В., Смирнова В.Б.</i> Устойчивость по Лагранжу и глобальная асимптотическая устойчивость маятниковых систем . . . . .	143
<i>Зайцев В.А.</i> Стабилизация стационарных билинейных комплексных систем . . . . .	146
<i>Иванюхин А.В.</i> Оптимальное управление группой исполнителей на основе решения задачи о назначениях с ограничениями . . . . .	149
<i>Изместьев И.В., Скрипов Е.А., Баринов А.М.</i> Об одной задаче управления транспортным потоком в макроскопической модели Пейна–Уизема . . . . .	152
<i>Исаева Д.И., Баландин Д.В.</i> Децентрализованное управление активным магнитным подшипником с использованием наблюдателя для стабилизации движения ротора . . . . .	155

<i>Каленова В.И., Морозов В.М., Тихонов А.А.</i> К вопросам стабилизации стационарных движений спутника-гиростата в гравитационном и магнитном полях . . . . .	159
<i>Каменецкий В.А.</i> Критерий Попова абсолютной устойчивости без S-процедуры . . . . .	163
<i>Канатников А.Н., Ткачева О.С., Виноградова М.С.</i> Сравнение множеств при численном решении задач локализации	166
<i>Каратов Р.Б., Паламарчук Е.С.</i> Исследование устойчивости билинейных стохастических моделей компартментного типа . . . . .	169
<i>Кожеевников И.Ф.</i> Вынужденные колебания нагруженной вращающейся шины с переменной длиной зоны контакта	173
<i>Королев В.С., Поляхова Е.Н., Потоцкая И.Ю., Путьшева Ю.Ю.</i> Взаимосвязь научных исследований в космической динамике и небесной механике . . . . .	176
<i>Косинов Н.А., Максимова И.С.</i> Управление по начальным данным в задаче с переменной структурой . . . . .	179
<i>Косов А.А.</i> Об устойчивости стационарных решений уравнений движения гиростата для аналога случая Лагранжа .	182
<i>Костин Г.В.</i> Программное управление изгибом упругой консоли в электрическом поле . . . . .	185
<i>Кочетков С.А.</i> Управление асинхронным двигателем в генераторном режиме . . . . .	189
<i>Кошелев А.А., Кугушев Е.И., Шахова Т.В.</i> О стационарных движениях шара, находящегося между двумя вращающимися сферами с вязким трением . . . . .	193
<i>Кравченко В.С., Иванюхин А.В.</i> Двухэтапный метод маршрутизации на основе динамического программирования для планирования уборки космического мусора . . . . .	196
<i>Красинский А.Я.</i> Общий метод строгого решения задач стабилизации конфигураций систем с геометрическими связями при неполной информации . . . . .	199
<i>Краснов Д.В., Уткин А.В.</i> Синтез динамической обратной связи в системах слежения на основе канонической формы с неопределенным входом . . . . .	203
<i>Крищенко А.П., Шестаков Р.Д.</i> Динамика модели хищник-жертва с квадратичной зависимостью скорости смертности хищников . . . . .	207

<i>Ласточкин К.А., Глущенко А.И.</i> Стабилизация и уклонение от перехвата по обратной связи на основе барьерных и управляющих функций Ляпунова . . . . .	210
<i>Ласточкин К.А., Глущенко А.И.</i> Метод инвариантных эллипсоидов в задаче подавления одного класса структурных возмущений . . . . .	214
<i>Ле Д.Н., Пыржин А.А.</i> Предикторное управление для нелинейных систем с входным запаздыванием . . . . .	218
<i>Ливанов Н.Д., Измestьев И.В.</i> Об одной задаче управления высоковольтными линиями электропередачи в условиях неопределенности . . . . .	222
<i>Ли Л.Г., Кожунько Ю.Г.</i> Блочный синтез системы управления колесной платформой с учетом ограничений на скорость и динамическим сглаживанием опорной траектории . . .	226
<i>Ломов А.А.</i> О гарантированных оценках устойчивости идентификации коэффициентов разностных уравнений . . . .	229
<i>Лонг Х.Д., Пыржин А.А., Конг Ч.Х.</i> Фиксированно-временное барьерное скользящее управление нелинейными системами, подверженными ограниченным неизвестным возмущениям . . . . .	233
<i>Лу С., Досаев М.З., Щербов Р.М.</i> Об управлении зарядкой батареи . . . . .	237
<i>Маковеева П.Е.</i> Функционал Ляпунова с заданной производной для параболического уравнения с запаздыванием . .	240
<i>Максименко М.В., Тихонов А.А.</i> О модификации электродинамического метода трехосной стабилизации спутника на полярных орбитах . . . . .	244
<i>Маштаков А.П.</i> Задача быстрогодействия на группе вращений трехмерного пространства с управлением в полукруге . .	247
<i>Моржгин О.В.</i> К аналитической и численной оптимизации для получения двухкубитных вентилей на унитарной динамике	251
<i>Морозов М.В.</i> Критерии устойчивости периодических разностных включений . . . . .	254
<i>Морозов Ю.В.</i> Анализ циклов в системе 3-го порядка с разрывной правой частью и двумя вложенными сатураторами	257
<i>Овчинников М.Ю.</i> Особенности управления движением малых спутников в околоземных и межпланетных миссиях	261
<i>Оморов Р.О.</i> Алгебраический метод исследования робастности дискретных интервальных динамических систем . .	265

<i>Орёл Н.А., Черкасов О.Ю.</i> Задача Дубинса со штрафом на затраты управления . . . . .	269
<i>Орлов Ю.В., Рассадин Ю.М.</i> Регулирование температуры помещения в условиях параметрической неопределенности и неполных измерений . . . . .	273
<i>Петров А.Г.</i> О равновесии и устойчивости вращающихся капель в электростатическом поле . . . . .	276
<i>Петров М.М.</i> Экстремальное параметрическое возбуждение маятника при ограничениях на амплитуду и скорость управления . . . . .	279
<i>Петров Н.Н.</i> Многократная поимка убегающего в линейных нестационарных дифференциальных играх . . . . .	283
<i>Платонов А.В.</i> Импульсная стабилизация нелинейных нестационарных систем с переключениями . . . . .	286
<i>Подгорная В.М., Ибрагимов Д.Н.</i> Алгоритм решения задачи быстродействия для системы с дискретным временем на основе суперэллипсоидальных аппроксимаций . . . . .	290
<i>Потапов А.П., Галяев А.А.</i> О задаче противодействия наблюдателю с псевдоизмерениями . . . . .	293
<i>Родников А.В.</i> О параметрах компенсирующих устройств при перемещении космического аппарата с солнечным парусом вдоль леерной связи . . . . .	297
<i>Ролдугин Д.С., Маштаков Я.В.</i> Использование скользящего управления с изменяющейся поверхностью для построения магнитного управления ориентацией спутника . . . . .	300
<i>Рюмина К.А.</i> Устойчивость и динамика реакционно-диффузионной модели распространения вирусной инфекции с учетом влияния температуры тела . . . . .	304
<i>Рябов П.Е.</i> Параметризация дискриминантной поверхности одного частного случая интегрируемости динамики твердого тела . . . . .	307
<i>Савин Н.А., Проскурников А.В., Амбросовская Е.Б.</i> Анализ устойчивости по приращениям системы успокоения качки при помощи бортовых рулей на малых скоростях . . . . .	311
<i>Саломатин А.А., Рожнов А.В.</i> Отказоустойчивость в условиях цифрового моделирования с применением Smart Robot Car Kit v 3.0 . . . . .	314
<i>Самсонов В.А., Ложкин Б.Я., Ожунев Ю.М., Привалова О.Г.</i> Устойчивость режима планирования при прыжке лыжника с трамплина . . . . .	318

<i>Седова Н.О., Дружинина О.В.</i> Исследование устойчивости нелинейных систем с запаздыванием методом декомпозиции . . . . .	321
<i>Сесекин А.Н., Кандрина А.Д.</i> Устойчивость по Хайерсу–Уламу дифференциальных уравнений дробного порядка с производной Капуто и разрывными траекториями . . .	324
<i>Славеснов Л.А.</i> Управление методом обратной связи для системы БПЛА в гироскопическом стенде . . . . .	327
<i>Соколов В.Ф.</i> Робастное оптимальное слежение для дискретного минимально-фазового объекта с неизвестными параметрами и неизвестными границами смещенного внешнего возмущения и помехи измерений . . . . .	331
<i>Солодуша С.В.</i> Применение цепных дробей в задаче адаптивного управления с идентификацией для нелинейных теплообменных процессов . . . . .	334
<i>Сомов Е.И., Сомов С.Е., Бутырин С.А., Сомова Т.Е., Кузнецов П.К.</i> Управление космическим роботом при сближении, стыковке и обслуживании геостационарного спутника	337
<i>Сомов Е.И., Сомов С.Е., Бутырин С.А., Сомова Т.Е., Кузнецов П.К.</i> Существование и устойчивость колебаний в мехатронной релейной системе управления с гистерезисом	340
<i>Стребуляев С.Н., Круглов А.М.</i> Компьютерный анализ хаотического поведения в динамических системах . . . . .	344
<i>Титов А.Д., Белов И.Р.</i> Вычисление верхней границы анизотропийной нормы для моделей реакторов периодического действия . . . . .	349
<i>Ткаченко П.П., Баландин Д.В., Рябикова Т.В.</i> Минимальное управление упругими механическими системами . . . . .	353
<i>Тхай В.Н.</i> Многочастотные колебания в обратимой механической системе и их стабилизация . . . . .	356
<i>Ты К.В., Дударенко Н.А.</i> Прямая адаптивная компенсация возмущений для системы гироскопа с управляющим моментом с различными запаздываниями на входе . . . . .	360
<i>Федосеев М.С., Ардентов А.А.</i> Экстремальные траектории в задаче Маркова с управлением на треугольнике . . . . .	363
<i>Фетисов Д.А.</i> Орбитальная плоскостность систем без дрейфа с двумя управлениями . . . . .	367
<i>Финогенко И.А.</i> О скользящих режимах функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью	370

<i>Финошин А.В.</i> Синтез эталонной модели на основе метода генерирующей модели . . . . .	373
<i>Финошин А.В., Провоторов Т.В.</i> Управление каскадными системами со скользящим режимом с несимметричным дребезгом . . . . .	377
<i>Фуртат И.Б., Вражеский С.А.</i> Ускоренная сходимость решений нелинейных систем к положению равновесия за фиксированное время . . . . .	380
<i>Фуртат И.Б., Гуцин П.А.</i> Дивергентный метод в задачах управления, исследования устойчивости и колебаний с применением к управлению мехатронными системами и объектами в нефтегазодобывающей промышленности . .	384
<i>Хлебников М.В.</i> Синтез ПИД-регулятора с аperiodическим фильтром как задача оптимизации . . . . .	388
<i>Холостова О.В.</i> Периодические движения неавтономной гамильтоновой системы в случаях нулевой и целой или полуполой частот предельной автономной задачи . . . . .	391
<i>Хорошева А.А., Черноусько Ф.Л.</i> Динамика управляемой многозвенной системы в жидкости . . . . .	394
<i>Чернов В.А., Каканов М.А.</i> К вопросу о использовании матрицы информации Фишера в адаптивной идентификации параметров линейных стационарных систем в присутствии гауссова шума . . . . .	397
<i>Честнов В.Н., Орлов Ю.Ф.</i> Принципиальное уточнение оценки предельно-достижимой точности систем с дискретными регуляторами . . . . .	401
<i>Шатов Д.В.</i> Анализ робастной устойчивости линейной системы второго порядка с матрицей в сопровождающей форме	404
<b>Алфавитный указатель . . . . .</b>	<b>408</b>

## Развитие методов анализа устойчивости позитивных систем

*А. Ю. Александров*

СПбГУ, С.-Петербург, Россия  
a.u.aleksandrov@spbu.ru

Приводится обзор методов анализа устойчивости позитивных динамических систем. Основное внимание уделяется проблеме диагональной устойчивости (построения диагональных функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского). Рассматриваются приложения изложенных подходов к задачам популяционной динамики и управления формациями мобильных агентов.

*Ключевые слова:* позитивные системы, прямой метод Ляпунова, диагональная устойчивость, запаздывание, переключения

Позитивной называется динамическая система, у которой движения с неотрицательными начальными данными остаются неотрицательными при возрастании времени. Системы такого рода широко применяются для моделирования различных процессов в биологии, эпидемиологии, экономике, химии, а также в ряде других областей (см. [1]). Позитивные системы могут получаться в качестве систем сравнения для крупномасштабных (сложных) систем [2]. В последние годы они эффективно используются в задачах управления формациями мобильных агентов [3].

Наряду с многочисленными приложениями, позитивные системы обладают интересными и важными теоретическими свойствами. Одно из таких свойств — диагональная устойчивость [1]. Известно, что для асимптотической устойчивости позитивной линейной стационарной системы дифференциальных уравнений необходимо и достаточно, чтобы для нее существовала функция Ляпунова в виде квадратичной формы с диагональной матрицей, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Этот результат нашел широкие приложения в задачах анализа устойчивости не только линейных стационарных систем, но и линейных систем с переменными коэффициентами, а также некоторых классов нелинейных систем, см., например, [4, 5] и цитируемую там литературу.

В данном докладе приводится обзор методов исследования устойчивости позитивных систем. Основное внимание уделяется проблеме

диагональной устойчивости (построения диагональных функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского).

Рассматриваются как линейные системы, так и некоторые типы нелинейных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, разностными и дифференциально-алгебраическими уравнениями. Изучаются системы с запаздыванием в случаях постоянных, распределенных, неограниченных и бесконечных запаздываний. Для систем с переключениями режимов функционирования определяются условия, при выполнении которых для соответствующих семейств подсистем существуют общие функции Ляпунова или функционалы Ляпунова–Красовского, что гарантирует асимптотическую устойчивость гибридных систем при любых допустимых режимах переключения. Приводятся конструктивные подходы к построению указанных функций и функционалов, основанные на нахождении положительных решений вспомогательных систем линейных алгебраических неравенств. Для систем Персидского и систем Лурье непрямого управления устанавливаются достаточные условия абсолютной устойчивости (асимптотической устойчивости при любых допустимых нелинейностях, запаздываниях и переключениях).

Изложенные результаты применяются к задачам анализа динамики обобщенных моделей Лотки–Вольтерра, описывающих взаимодействие видов в биологических сообществах, а также к некоторым задачам управления формациями мобильных агентов.

### Список литературы

1. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston: Birkhauser, 1999.
2. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
3. Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.
4. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal Riccati stability and applications // *Linear Algebra and its Appl.* 2016. V. 492. P. 38–51.
5. *Aleksandrov A.* On the existence of diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for a class of nonlinear positive time-delay systems // *Automatica.* 2024. V. 160. Art. 111449.

# Development of Methods for the Stability Analysis of Positive Systems

*A. Yu. Aleksandrov*

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia  
a.u.aleksandrov@spbu.ru

A review of methods for the stability analysis of positive dynamical systems is provided. The focus is on the problem of diagonal stability (constructing diagonal Lyapunov functions and Lyapunov–Krasovskii functionals). Applications of the presented approaches to problems of population dynamics and control of mobile agent formations are considered.

---

УДК 517.929.4

## Характеристики чувствительности равновесия нелинейных дискретных систем

*Б. И. Ананьев*

ИММ УрО РАН им. Н. Н. Красовского, Екатеринбург, Россия  
abi@imm.uran.ru

Ранее была введена матрица стохастической чувствительности равновесия дискретной системы. В настоящей работе рассматривается похожее понятие без использования стохастических методов. Кроме того, изучается асимптотика и свойства областей достижимости (далее ОД) возмущенных и линеаризованных систем. Рассмотрены примеры.

*Ключевые слова:* экспоненциальная устойчивость, область достижимости, чувствительность равновесия

Рассмотрим нелинейную детерминированную систему  $x_t = f(x_{t-1}, v_t)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x, v)$  — достаточно гладкая  $n$ -векторная функция,  $t \in \mathbb{N}$ ,  $v_t \in \mathbb{R}^m$  — неопределенные, квадратично ограниченные возмущения:  $\sum_{i=1}^{\infty} |v_t|^2 \leq \varepsilon^2$ ,  $|\cdot|$  — евклидова норма. Пусть невозмущенная система имеет экспоненциально устойчивое равновесие  $\bar{x}$  в некоторой ограниченной инвариантной окрестности  $U$ . Равновесие  $\bar{x}$  называется *экспоненциально устойчивым* в  $U$ , если существуют  $K > 0$ ,  $l > 0$  та-

кие, что для всех  $t \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство  $|x_t - \bar{x}| \leq K e^{-lt} |x_0 - \bar{x}|$ , где  $x_t$  — решение невозмущенной системы с начальным условием  $x_0 \in U$ .

Для отклонений  $z_t = x_t - \bar{x}$  от положения равновесия  $\bar{x}$  имеем систему первого приближения  $z_t = F_t z_{t-1} + S_t v_t$ , где  $F_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0)$ ,  $S_t = \frac{\partial f}{\partial w}(\bar{x}, 0)$ . Построим теперь ОД возмущенной системы из состояния  $\bar{x}$  при малых ограничениях. Определим множества

$$(1) \quad G_t(x_t) = \left\{ [x_{t-1}; v_t] : x_t = f(x_{t-1}, v_t), \quad V_{t-1}(x_{t-1}) + |v_t|^2 \leq \varepsilon^2 \right\}, \\ \mathcal{D}_t = \{x_t : x_t = f(x_{t-1}, v_t), \quad [x_{t-1}; v_t] \in G_t(x_t)\}, \quad V_0(x_0) = 0,$$

где  $\mathcal{D}_t$  — область достижимости на шаге  $t$ . Далее определяем функцию  $V_t(x_t) = \min_{[x_{t-1}; v_t] \in G_t(x_t), x_t = f(x_{t-1}, v_t)} \left\{ V_{t-1}(x_{t-1}) + |v_t|^2 \right\}$ , где  $x_t \in \mathcal{D}_t$ . Множества  $X_t(\varepsilon) = \left\{ x_t : V_t(x_t) \leq \varepsilon^2 \right\}$  являются искомыми ОД и совпадают с множествами  $\mathcal{D}_t$  из (1). Доказательство приведено в [1]. Аналогично поступаем для линейной системы. ОД  $X_t^0(\varepsilon)$  для линейной системы определяется квадратичной функцией  $V_t(z_t) = z_t^\top W_t^- z_t$ , где  $W_t = F_t W_{t-1}^\top F_t^\top + S_t S_t^\top$ ,  $W_0 = 0$ ,  $z_t \in \text{im } W_t$ . Символом  $A^-$  обозначается псевдообратная матрица для  $A$ .

Отметим, что  $X_t^0(\varepsilon) = W_t^{1/2} B(0, \varepsilon)$ , где  $B(0, \varepsilon)$  — шар в  $\mathbb{R}^n$  радиуса  $\varepsilon$ . В качестве следствия получаем существование предела  $\lim_{t \rightarrow \infty} W_t = W$ , поскольку экспоненциальная устойчивость влечет неравенство  $\rho(F) < 1$  для спектрального радиуса матрицы  $F$ . Полученный предел  $W$  назовем *матрицей чувствительности* системы в точке равновесия  $\bar{x}$ . В этом случае ОД  $X_t^0(\varepsilon) = \left\{ z_t : z_t^\top W_t^- z_t \leq \varepsilon^2 \right\} = W_t^{1/2} B(0, \varepsilon)$  сходится в смысле Хаусдорфа при  $t \rightarrow \infty$  к *множеству чувствительности*  $X^0(\varepsilon) = W^{1/2} B(0, \varepsilon)$ .

Рассмотрим экспоненциально устойчивый  $k$ -цикл  $\{\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{k-1}\}$  невозмущенной системы. Это значит, что  $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$  для всех  $t \in \mathbb{N}$  и выполняются условия устойчивости из [2]. Каждый вектор  $\bar{x}_i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ ,  $k$ -цикла является положением равновесия системы  $\bar{x}_{i+tk} = f^k(\bar{x}_{i+(t-1)k}, 0)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , где  $f^k$  —  $k$ -я итерация отображения  $f(x, 0)$ . Если вместо нуля подставить возмущения  $v_t$ , то приходим к системе первого приближения  $z_{i+tk} = A_i z_{i+(t-1)k} + \varepsilon B_i v_t$ ,  $A_i = \frac{\partial f^k}{\partial x}(\bar{x}_i, 0) = F_i F_{i-1} \dots F_k \dots F_{i+1}$ ,  $B_i = \frac{\partial f^k}{\partial w}(\bar{x}_i, 0) = S_i S_{i-1} \dots S_{i+1}$ , где матрицы вычисляются по цепному правилу дифференцирования. Так же, как ранее, приходим к предельной матрице  $W_i$ , поскольку спектральный

радиус  $\rho(A_i) < 1$  ввиду экспоненциальной устойчивости цикла. Набор предельных матриц  $\{W_0, \dots, W_{k-1}\}$  определяет чувствительность  $k$ -цикла.

Рассмотрим свойства ОД для системы при малых ограничениях. Точку  $\bar{x}$  зафиксируем. Функция  $f$  считается достаточно гладкой в окрестности точки  $(\bar{x}, 0)$ . Пусть  $T > 1$ ,  $f^t(v) = f\left(f^{t-1}(v), v_t\right)$ ,  $t = 2, \dots, T$ ,  $f^1(v) = f(\bar{x}, v)$ . Таким образом, в обозначении  $f^T(v)$  вектор  $v \in \mathbb{R}^{mT}$  и, более того,  $v$  принадлежит шару  $B(0, \varepsilon)$  этого пространства в силу ограничений. В любом шаре  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^{mT}$ , содержащемся в окрестности гладкости, гессианы скалярных компонент  $f_i^T$ , как непрерывные матрицы, будут ограничены по норме. Значит, выполняется условие Липшица  $\left| \frac{\partial f^T}{\partial v}(u) - \frac{\partial f^T}{\partial v}(w) \right| \leq L|u - w|$ ,  $L > 0$ , для якобианов внутри шара  $B(0, r)$ . Если рассмотреть якобиан  $\frac{\partial f^T}{\partial v}(0)$ , то размерность области значений этой матрицы совпадает с размерностью подпространства векторов  $x_T$  при решении линейной системы  $z_t = Fz_{t-1} + Sv_t$ ,  $z_0 = 0$ , так как  $\frac{\partial f^T}{\partial v}(0) = [F^{T-1}S \dots FS S]$ . Заметим, что ОД  $X_T(\varepsilon) = f^T(B(0, \varepsilon))$ ,  $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^{mT}$ . С использованием теоремы 2.1 из [3] получаем следующий результат.

**Теорема 1.** Если ранг матрицы  $\frac{\partial f^T}{\partial v}(0)$  равен  $n$ , то ОД  $X_T(\varepsilon)$  выпуклы при  $\varepsilon < \min\{r, \frac{\nu}{2L}\}$ , где  $\nu$  — наименьшее сингулярное число матрицы  $\frac{\partial f^T}{\partial v}(0)$ .

При  $T \geq n$  ранг матрицы  $\frac{\partial f^T}{\partial v}(0)$  не зависит от  $T$  и можно полагать  $T = n$ . При больших  $T$  условие теоремы 1 — это критерий Р. Калмана полной управляемости. Во всяком случае, для любого  $T$  при полной управляемости найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что ОД  $X_T(\varepsilon)$  выпукла.

О соотношении эллипсоидов  $X_T^0(\varepsilon)$  и выпуклых множеств  $X_T(\varepsilon) - \bar{x}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в условиях теоремы 1 можно сказать следующее.

**Теорема 2.** Выпуклые множества  $X_T(\varepsilon) - \bar{x}$  и  $X_T^0(\varepsilon)$  в условиях теоремы 1 асимптотически эквивалентны (см., например, [4]).

Это означает, что расстояние Банаха-Мазура  $m(X_T(\varepsilon) - \bar{x}, X_T^0(\varepsilon))$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь  $m(X, Y) = \log(s(X, Y) \cdot s(Y, X))$ ,  $s(X, Y) = \inf\{t \geq 1 : tX \supset Y\}$ . Данная эквивалентность более сильная, чем сближение по Хаусдорфу. Доказательство использует результаты [4] и представление хаусдорфова расстояния через опорные функции.

### Список литературы

1. *Ананьев Б.И., Юровских П.А.* Общая задача гарантированного оценивания для многошаговых систем // Изв. Иркутского гос. ун-та. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 37–53.
2. *Васин В.В., Ряшко Л.Б.* Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. М.–Ижевск: РХД, 2006.
3. *Polyak B.T.* Convexity of Nonlinear Image of a Small Ball with Applications to Optimization. Set-Valued Analysis 9: 159–168, 2001. P. 159–168.
4. *Gusev M.I.* The limits of applicability of the linearization method in calculating small-time reachable sets // Ural Mathematical Journal. 2020. Vol. 6, no. 1. P. 71–83.

### Sensitivity Characteristics of the Balance for Nonlinear Discrete Systems

*B. I. Ananyev*

N. N. Krasovskii Institute of Math. and Mech. RAN, Yekaterinburg, Russia  
abi@imm.uran.ru

Earlier, the matrix of stochastic sensitivity of the balance for a discrete system was entered. In this paper, the similar concept without use of stochastic methods is considered. Besides, the asymptotic and properties of reachable sets (further RS) the perturbed and linearized systems are studied. Examples are reviewed.

---

## Задача быстродействия для двойного линейного обратного маятника

*И. М. Ананьевский*

ИПМех РАН, Москва, Россия  
anan@ipmnet.run

Рассматривается задача оптимального быстродействия для линеаризованного перевернутого двойного маятника. Построен закон управления в форме обратной связи, который за минимальное время приводит маятник в верхнее положение равновесия с помощью ограниченного момента, приложенного в точке подвеса.

*Ключевые слова:* линейная управляемая система, обратный маятник, принцип максимума Понтрягина

### 1. Введение

Предлагается решение классической задачи оптимального управления, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [1] и методе построения поверхностей переключения [2]. Нормальная форма Коши изучаемой системы представляется диагональной матрицей с вещественными коэффициентами, что позволяет решать задачу быстродействия для ее подсистем, последовательно повышая размерность подсистем и используя каждый раз решение предыдущей задачи.

### 2. Постановка задачи и уравнения движения

Считаем, что маятник состоит из двух соединенных идеальным шарниром жестких невесомых стержней с длинами  $l_1, l_2$ , на концах которых закреплены материальные точки с массами  $m_1, m_2$  соответственно. Предполагается, что этот двузвенник перемещается в вертикальной плоскости в поле силы тяжести в окрестности верхнего положения равновесия под действием момента  $u_0$ , приложенного в точке подвеса первого звена.

Линеаризованное в окрестности верхнего положения равновесия уравнение движения маятника запишем в форме

$$(1) \quad K\ddot{\varphi} = -P\varphi + Bu_0, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^\top, \quad B = (1, 0)^\top.$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2$  — углы отклонения звеньев от вертикали, а матрица ки-

нетической энергии  $K$  и матрица потенциальной энергии  $P$  имеют вид

$$K = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & l_1 l_2 m_2 \\ l_1 l_2 m_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad P = - \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2 gl_2 \end{pmatrix},$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести. На управляющую силу накладывается ограничение

$$(2) \quad |u_0| \leq U, \quad U > 0.$$

Необходимо построить закон управления в форме обратной связи, который удовлетворяет ограничению (2) и приводит систему (1) из произвольного состояния в начало координат за минимальное время.

Известно [3], что система, описывающая в линейном приближении динамику многосвязного перевернутого маятника под действием момента, приложенного к первому звену, удовлетворяет условию управляемости Калмана [4].

В нормальной форме Коши в безразмерных переменных система (1) и ограничения (2) могут быть представлены в виде

$$(3) \quad \dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u, \quad \dot{x}_3 = -\alpha x_3 + u, \quad \dot{x}_4 = \alpha x_4 + u,$$

$$(4) \quad |u| \leq 1.$$

Здесь постоянная  $a > 0$  зависит от параметров маятника.

Оптимальное по быстродействию управление для линейной системы порядка  $n$  с вещественными собственными числами при ограничении вида (4) для любого начального состояния задается кусочно-постоянной функцией времени, принимающей значения 1 и  $-1$ , и имеет не более  $n - 1$  переключений [1]. Для построения искомого закона управления достаточно описать множества, на которых управление меняет знак, а также указать области фазового пространства, в которых управление принимает значения  $+1$  и  $-1$ .

В докладе решение задачи сводится к решению нескольких вспомогательных задач. Сначала рассматривается задача оптимального быстродействия для системы, состоящей только из первых двух уравнений (3). Затем, используя полученное решение, находится закон оптимального управления для системы, состоящей из первых трех уравнений. Наконец, результаты решения этих вспомогательных задач применяются для построения оптимального по быстродействию управления полной системой.

### 3. Задача быстродействия для подсистемы размерности 3

Приведем кратко решение задачи для системы

$$(5) \quad \dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = x_2 + u, \quad \dot{x}_3 = -\alpha x_3 + u,$$

состоящей из трех первых уравнений (3), множество начальных состояний, из которых можно попасть в начало координат при ограничении (4), представляет собой «слой»  $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : |x_2| < 1\}$ . Этот слой разбивается на две области поверхностью  $S$ , которая описывается уравнением  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , т.е. является графиком некоторой непрерывной функции  $f$ , заданной на полосе  $\{(x_1, x_2) \in R^2 : |x_2| < 1\}$  (поверхность  $S$  для случая  $\alpha = 2$  представлена на рис. 1). Выше этой

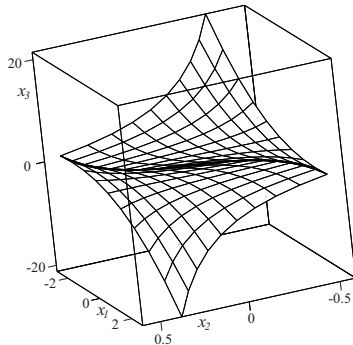


Рис. 1: Поверхность первого переключения

поверхности оптимальное управление равно  $-1$ , ниже оно равно  $+1$ . Когда траектория достигает поверхности  $S$ , управление меняет знак и движение продолжается по этой поверхности до кривой  $\Gamma$  (жирная кривая на рис. 1). Здесь управление еще раз меняет знак, а траектория приходит в начало координат вдоль этой кривой.

Работа выполнена в рамках государственного задания №124012500443-0.

#### Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. Фельдбаум А.А. О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства. АиТ. 1955. Т. 1. № 2. С. 129–149.

3. *Габриелян М.С., Красовский Н.Н.* К задаче о стабилизации механической системы. ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 5. С. 801–811.
4. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969.

## **A Time-Optimal Problem for a Double Linear Inverse Pendulum**

*I. M. Ananievski*

IPMech RAS, Moscow, Russia  
anan@ipmnet.ru

We consider the time-optimal control problem for a linearized inverted double pendulum. A feedback control law is constructed that brings the pendulum to its upper equilibrium position in minimal time using a bounded torque applied at the suspension point.

---

УДК 517.968.74

### **Прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с цилиндрическим фазовым пространством**

*А. С. Андреев<sup>1</sup>, Ж. И. Буранов<sup>2</sup>, Д. Х. Хусанов<sup>3</sup>*

УлГУ, Ульяновск, Россия <sup>1</sup>

Академический лицей Ташкентского государственного технического  
университета, Ташкент, Узбекистан <sup>2</sup>

Университет Sambhram, Джизак, Узбекистан <sup>3</sup>  
asa5208@mail.ru, juventus88.60.94@mail.ru, d.khusanov1952@mail.ru

В работе получены результаты о предельных свойствах решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в цилиндрическом фазовом пространстве. Построены функционал и функция Ляпунова для определения достаточных условий глобального притяжения и полуглобальной асимптотической устойчивости множества положений равновесия рассматриваемых уравнений.

*Ключевые слова:* устойчивость, интегро-дифференциальные уравнения, функционал Ляпунова, цилиндрическое фазовое пространство

## 1. Введение

Основным методом исследования устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений является прямой метод Ляпунова. Его развитие позволяет значительно увеличить классы решаемых теоретических и прикладных задач. Работы Н.Н. Красовского и Б.С. Разумихина явились основополагающими для исследования устойчивости функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) с конечным запаздыванием. В работах [1, 2] посредством построения топологической динамики неавтономных ФДУ представлено развитие прямого метода Ляпунова со знакопостоянной производной [3]. В работах [4, 5] такая структура исследования применяется для решения задач об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) типа Вольтерра.

Целью настоящего доклада является представление результатов по развитию прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с цилиндрическим фазовым пространством.

## 2. Основной результат

Рассматривается ИДУ типа Вольтерра

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t g(t, s, x(t), x(s)) ds,$$

где  $x^T = (y^T, z^T)$ ,  $y \in R^\nu$ ,  $z \in R^\mu$ ,  $\nu + \mu = n$ ,  $R^\nu$  и  $R^\mu$  —  $\nu$ - и  $\mu$ -мерные линейные действительные пространства с нормами  $\|y\| = \max(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_\nu|)$ ,  $\|z\| = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_\mu|)$  соответственно,  $\|x\| = \max(\|y\|, \|z\|)$ , функции  $f = f(t, y, z)$  и  $g = g(t, s, y^{(1)}, z^{(1)}, y^{(2)}, z^{(2)})$  определены и непрерывны соответственно при  $(t, y, z) \in R \times R^\nu \times R^\mu$  и  $(t, s, y^{(1)}, z^{(1)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \in R^2 \times R^{2\nu}$ , являются периодическими по переменным  $z \in R^\mu$  и  $(z^{(1)}, z^{(2)}) \in R^{2\mu}$  соответственно, иными словами,  $f(t, y, z + 2\pi G) = f(t, y, z)$ ,  $g(t, s, y^{(1)}, z^{(1)} + 2\pi G^{(1)}, y^{(2)}, z^{(2)} + 2\pi G^{(2)}) = g(t, s, y^{(1)}, z^{(1)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \forall G, G^{(1)}, G^{(2)} \in Z^\mu$ .

Полагается, что функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют условиям предкомпактности уравнений (1) в функциональных пространствах, определяемых аналогично построениям, проведенным в работах [4, 5].

При условиях  $f(t, 0, \pi G) = f(t, 0, 0) = 0$ ,  $g(t, s, 0, \pi G^{(1)}, 0, \pi G^{(2)}) = g(t, s, 0, 0, 0, 0) = 0 \forall G, G^{(1)}, G^{(2)} \in Z^\mu$  уравнения (1) допускают суще-

ствование множества положений равновесия  $S = \{y = 0, z = \pi G^{(k)}, G^{(k)} \in Z^\mu, k = 1, 2, \dots\}$ .

Исследуется задача о достаточных условиях глобального притяжения множества  $S$  и его полуглобальной асимптотической устойчивости.

Решение задач достигается на основе применения функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной и функций Ляпунова.

### 3. Заключение

В работе решена задача о достаточных условиях глобального притяжения и полуглобальной асимптотической устойчивости множества положений равновесия неавтономного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра путем построения функционала Ляпунова со знакопостоянной производной и функции Ляпунова.

### Список литературы

1. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 435–440.
2. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 7. С. 876–885.
3. Андреев А.С., Лысяков В.Н., Хусанов Д.Х. К методу Ляпунова в задаче об устойчивости функционально дифференциального уравнения // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1996. Вып. 1(2). С. 5–10.
4. Андреев А.С., Перегудова О.А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 2. С. 156–176.
5. Andreev A.S., Peregudova O.A. Semi-Definite Lyapunov Functionals in the Stability Problem of Volterra Integral-Differential Equations // IFAC-PapersOnLine : 15th, Sinaia, 09–11 September 2019. V. 52. Sinaia, 2019. P. 103–108.

# Direct Lyapunov Method in the Stability Problem of Volterra Integro-Differential Equations with Cylindrical Phase Space

*A. S. Andreev*<sup>1</sup>, *J. I. Buranov*<sup>2</sup>, *D. Kh. Khusanov*<sup>3</sup>

UISU, Ulyanovsk, Russia<sup>1</sup>

Academic Lyceum of Tashkent State Technical University, Tashkent,  
Uzbekistan<sup>2</sup>

Sambhram University, Jizzakh, Uzbekistan<sup>3</sup>

asa5208@mail.ru, juventus88.60.94@mail.ru, d.khusanov1952@mail.ru

In this paper, the limiting properties of solutions to Volterra-type integro-differential equations in cylindrical phase space have been obtained. Lyapunov functional and function are constructed to find sufficient conditions for global attraction and semi-global asymptotic stability of the set of equilibrium positions of the equations.

---

УДК 517.977.1

## Об одном случае стабилизации линейной системы управления по состоянию

*О. Г. Антоновская, А. В. Бесклубная*

ННГАСУ, Н. Новгород, Россия

olga.antonovskaja@yandex.ru, antbesk@gmail.com

В докладе предложена возможность решения задачи о статической стабилизации непрерывной системы управления по состоянию, использующая свойства конкретной квадратичной функции Ляпунова.

*Ключевые слова:* непрерывная система управления, стабилизация по состоянию, квадратичная функция Ляпунова

### 1. Введение

Задача о стабилизации динамических систем является одной из важнейших задач теории управления [1]. В работе рассматривается вопрос о возможности статической стабилизации по состоянию таким образом, чтобы заданная положительно определенная квадратичная форма  $V(x)$  была функцией Ляпунова, для которой выполнение неравенства  $\dot{V}(x) < 0$  для производной обеспечивается с заданным запасом

$\delta$  (т.е.  $\dot{V}(x) \leq \delta V(x), x \neq 0$ ).

## 2. Основной результат

Рассмотрим непрерывную линейную систему управления

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu.$$

В (1)  $A, B$  — постоянные вещественные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния (вектор выхода),  $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор управления (вектор входа),  $t$  — время. Задачу поставим следующим образом: найти обратную связь  $u = Kx$ , где  $K$  — постоянная вещественная матрица размерности  $n \times n$ , такую, чтобы заранее известная положительно определенная квадратичная форма

$$(2) \quad V(x) = x^T P x \quad (P^T = P)$$

была функцией Ляпунова системы

$$(3) \quad \dot{x} = (A + BK)x,$$

удовлетворяющей условию  $\dot{V}(x) \leq \delta V(x), x \neq 0$  при заданном  $\delta < 0$ , т.е.  $\delta$  должно являться наибольшим корнем [2] уравнения

$$(4) \quad \det((A + BK)^T P + P(A + BK) - \mu P) = 0,$$

или

$$\det(P^{-1}(A + BK)^T P + (A + BK) - \mu I) = 0,$$

т.к.  $\det P > 0$  по условию. Матрицы  $(A + BK)^T P + P(A + BK)$  и  $P$  симметричны, поэтому все корни (4) вещественные [3, гл.10]. Тогда, согласно (4), если существует такая матрица  $D$ , все собственные значения которой отрицательны, причем

$$\delta_{n-1} < \delta_{n-2} < \dots < \delta_1 < \delta < 0,$$

такая, что матрица  $PD$  симметрична, тогда мы можем выбрать

$$P^{-1}(A + BK)^T P + (A + BK) = D,$$

откуда, учитывая, что  $P^T = P$ , получаем

$$(PBK)^T + PBK = PD - ((PA)^T + PA).$$

И если будем искать симметричную матрицу  $PBK$ , получим

$$2PBK = PD - ((PA)^T + PA),$$

а если к тому же матрица  $B$  невырожденная, то

$$(5) \quad K = \frac{1}{2}B^{-1}P^{-1}(PD - ((PA)^T + PA)).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть дана система управления (1), где матрица  $B$  невырожденная, а матрица  $PD$  симметричная. Тогда всегда существует обратная связь  $u = Kx$ , где матрица  $K$  определяется в силу (6), такая, что квадратичная форма (2) становится функцией Ляпунова системы (3), удовлетворяющей условию  $\max \dot{V}/V = \delta < 0$  и гарантирующей асимптотическую устойчивость для (3).

*Замечание 1.* Если  $P = I$ , можно выбрать

$$K = \frac{1}{2}B^{-1}(D - (A^T + A)D = \text{diag}\{\delta_{n-1}, \delta_{n-2}, \dots, \delta_1, \delta\},$$

Рассуждая аналогично, можно получить еще одну теорему.

**Теорема 2.** Пусть дана система управления (1), где матрица  $B$  невырожденная, а матрица  $DP$  симметричная. Тогда всегда существует обратная связь  $u = Kx$ , где матрица  $K$  определяется в силу

$$(6) \quad K = \frac{1}{2}B^{-1}P^{-1}(DP - ((PA)^m + PA))$$

такая, что квадратичная форма (2) становится функцией Ляпунова системы (3), удовлетворяющей условию  $\max \dot{V}/V = \delta < 0$  и гарантирующей асимптотическую устойчивость для (3).

### Список литературы

1. Шумафов М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор. // Вестник СПбГУ. Математика, Механика. Астрономия. 2019. № 4. Т. 6(64). С. 564–591.
2. Антоновская О.Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2(501). С. 19–23.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

# On a Case of Stabilization of a Linear State-Controlled Control System

*O. G. Antonovskaya, A. V. Besklubnaya*

Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,  
Russia

olga.antonovskaja@yandex.ru, antbesk@gmail.com

The paper proposes a possibility of solving the problem of static stabilization of a continuous state-feedback control system using the properties of a specific quadratic Lyapunov function.

---

УДК 517.977.52

## Экстремальные траектории в субримановой задаче для омниколесного робота с одним прицепом

*А. А. Ардентов*

ИПС РАН, Переславль-Залесский, Россия  
aaa@pereslavl.ru

Для омниколесного робота с прицепом исследуется субриманова задача в виде задачи быстрогодействия с линейной по управлению системой и множеством управлений в виде единичного шара с центром в начале координат. Доказана интегрируемость по Лиувиллю нормальной гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина. Получено описание аномальных траекторий.

*Ключевые слова:* омниколесный робот с прицепом, субриманова задача, принцип максимума Понтрягина, интегрируемость по Лиувиллю, аномальные экстремали

### 1. Введение

Рассмотрена геометрическая модель омниколесного робота с колесным прицепом, закрепленным в центре робота (см. Рис. 1).

Омниколесный робот с прицепом двигаются по плоскости без препятствий, причем робот в отличие от прицепа может перемещаться в любом направлении, в том числе в направлении, перпендикулярном направлению колес. Без ограничения общности считаем, что расстояние между роботом и прицепом равно 1. Положение робота с прице-

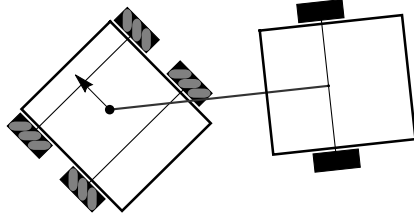


Рис. 1: Модель омниколесного робота с колесным прицепом

пом определяется вектором  $q = (x, y, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$ . Координаты  $(x, y)$  определяют положение центра робота на плоскости, угол  $\theta$  задает ориентацию робота относительно оси  $x$ , а угол  $\varphi$  задает ориентацию прицепа относительно робота.

## 2. Постановка задачи

Субриманова задача формулируется в виде задачи быстрогодействия

- (1)  $\dot{q} = u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3$ ,
- (2)  $u = (u_1, u_2, u_3) \in U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1\}$ ,
- (3)  $X_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, -\sin \varphi)$ ,  $X_2 = (0, 0, 1, -1)$ ,
- (4)  $X_3 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, \cos \varphi)$ ,
- (5)  $q(0) = (x_0, y_0, \theta_0, \varphi_0)$ ,  $q(T) = (x_1, y_1, \theta_1, \varphi_1)$ ,
- (6)  $T \rightarrow \min$ ,

управления  $u_1, u_3$  задают компоненты линейной скорости центра робота, а  $u_2$  есть его угловая скорость.

*Замечание 1.* Система (1)–(5) вполне управляема в силу теоремы Рашевского-Чжоу и имеет вектор роста (3, 4). Существование оптимальных траекторий в задаче быстрогодействия (1)–(6) гарантирует теорема Филишова [1].

Исследуются экстремальные траектории, удовлетворяющие необходимому условию оптимальности — принципу максимума Понтрягина (ПМП) [2].

## 3. Гамильтонова система ПМП

В нормальном случае с ненулевым максимизированным гамильтонианом  $\mathcal{H}(h) := \max_{u \in U} H(h, u) \equiv h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \neq 0$  из условия максимума следует, что  $u_i = h_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Нормальная гамильтонова система, исходя из условия максимума, принимает следующий вид:

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = h_3(h_2 - h_4), \\ \dot{h}_2 = 0, \\ \dot{h}_3 = h_1(h_4 - h_2), \\ \dot{h}_4 = h_4(h_1 \cos \varphi + h_3 \sin \varphi), \\ \dot{x} = h_1 \cos \theta - h_3 \sin \theta, \\ \dot{y} = h_1 \sin \theta + h_3 \cos \theta, \\ \dot{\theta} = h_2, \\ \dot{\varphi} = -h_1 \sin \varphi + h_3 \cos \varphi - h_2. \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Нормальная гамильтонова система (7) ПМП интегрируема по Лиувиллю и имеет четыре функционально независимых первых интеграла, находящиеся в инволюции [3].*

В аномальном случае с нулевым максимизированным гамильтонианом  $\mathcal{H}(h) := \max_{u \in U} H(h, u) \equiv 0$  справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Аномальные экстремали соответствуют вращениям робота на месте, при которых прицеп остается неподвижным. Они являются оптимальными при*

$$u_1(t) = u_3(t) = 0, \quad u_2(t) = \pm 1, \quad t \in [0, T], \quad T \leq \pi.$$

#### 4. Заключение

Исследована гамильтонова система ПМП в субримановой задаче для омниколесного робота с колесным прицепом. Доказано, что нормальная гамильтонова система интегрируема по Лиувиллю. Аномальные экстремали, не являющиеся строго аномальными, суть повороты робота на месте. Полученные результаты важны как с теоретической точки зрения, так и с практической, и могут использоваться при планировании движения соответствующей модели робота с прицепом по ровной поверхности, например, в складском помещении для транспортировки грузов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 25-21-00681), <https://rscf.ru/project/25-21-00681/>.

#### Список литературы

1. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.

2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
3. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.

## Extremal Trajectories in a Sub-Riemannian Problem for an Omniwheel Robot with a Trailer

A. A. Ardentov

Ailamazyan Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, Russia  
aaa@pereslavl.ru

We study a sub-Riemannian problem for an omniwheel robot with a trailer as time minimizing problem with a linear control system and a control in a unit ball centered at the origin. The Liouville integrability of a normal Hamiltonian system of the Pontryagin maximum principle is proved. A description of abnormal trajectories is obtained.

---

УДК 517.272

### О необходимых условиях седловой точки

А. В. Арутюнов, З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский

ИПУ РАН, Москва, Россия

arutyunov@cs.msu.ru, zuxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

В докладе формулируются новые необходимые условия седловой точки. Приводится сравнение предложенных необходимых условий с известными. Формулируется утверждение об устойчивости критических точек, т.е. точек, удовлетворяющих необходимым условиям.

*Ключевые слова:* необходимые условия оптимума, седловая точка, устойчивость

### 1. Введение

Пусть задано натуральное число  $n \in \mathbb{N}$ , непустые компактные множества  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ , непрерывно дифференцируемая функция  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и точка  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ . Напомним, что если

$$f(x, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y,$$

то точка  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  называется седловой точкой функции  $f$  (на множестве  $X \times Y$ ).

Из необходимых условий минимума (см., например, [1, Prop. 1.39]) вытекает, что если точка  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  является седловой точкой функции  $f$ , то

$$(1) \quad \begin{aligned} \langle f'_x(\bar{x}, \bar{y}), v \rangle &\geq 0 \quad \forall v \in T_X(\bar{x}), \\ \langle f'_y(\bar{x}, \bar{y}), w \rangle &\leq 0 \quad \forall w \in T_Y(\bar{y}). \end{aligned}$$

Здесь и далее  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — это стандартное скалярное произведение в пространствах  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $f'_x(\bar{x}, \bar{y})$  — это частная производная функции  $f$  по переменной  $x$  в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ , а  $T_X(\bar{x})$  — это касательный конус Булигана (см., например, [1, Sec. 1.4] и [1, §24]).

Необходимое условие седловой точки (1) не является достаточным. Более того, оно может выполняться в некоторых точках и в случае, когда седловая точка отсутствует вовсе.

Ниже мы сформулируем новые необходимые условия седловой точки. Кроме того, будет приведен пример, иллюстрирующий отличие предложенных необходимых условий от условий (1). Также в работе формулируется утверждение об устойчивости необходимых условий.

## 2. Основной результат

Положим

$$\begin{aligned} Q_X(y) &:= \{x \in X : f(x, y) = \min_{\xi \in X} f(\xi, y)\}, \quad y \in Y, \\ Q_Y(x) &:= \{y \in Y : f(x, y) = \max_{\eta \in Y} f(x, \eta)\}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Сформулируем необходимые условия седловой точки.

**Теорема 1.** *Если точка  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  является седловой точкой функции  $f$  (на множестве  $X \times Y$ ), то*

$$(2) \quad \begin{aligned} \max_{y \in Q_Y(\bar{x})} \langle f'_x(\bar{x}, y), v \rangle &\geq 0 \quad \forall v \in T_X(\bar{x}), \\ \min_{x \in Q_X(\bar{y})} \langle f'_y(x, \bar{y}), w \rangle &\leq 0 \quad \forall w \in T_Y(\bar{y}). \end{aligned}$$

Необходимые условия (1) и (2) являются независимыми. Последнее означает, что могут существовать две различные пары точек  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  и  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$  такие, что в первой точке  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  выполняется условие (1) и нарушается условие (2), а во второй точке  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$  нарушается условие (1) и выполняется условие (2).

Проиллюстрируем сказанное примером. Пусть

$$n = 1, \quad X = Y = [-1, 1], \quad f(x, y) \equiv xy + a(x) + b(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Здесь  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — это непрерывно дифференцируемая вогнутая функция, а  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — это непрерывно дифференцируемая выпуклая функция, относительно которых предполагается, что

$$\begin{aligned} a(-1) = a(1), \quad a'(0) \neq 0, \quad |a'(x)| < 1 \quad \forall x \in X; \\ b(-1) = b(1), \quad b'(0) \neq 0, \quad |b'(y)| < 1 \quad \forall y \in Y. \end{aligned}$$

Тогда, проведя несложные вычисления, можно убедиться, что условие (2) выполняется только в точке  $(0, 0)$ , а условие (1) нарушается в этой точке. В то же время существуют точки  $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$ , в которых условие (1) выполняется. Подробно этот пример рассмотрен в [3].

Перейдем к вопросу об устойчивости точек, удовлетворяющих соотношению (2). Обозначим через  $\mathcal{S}(f)$  множество точек  $(\bar{x}, \bar{y})$ , для которых выполняется (2).

**Теорема 2.** *Множество  $\mathcal{S}(f)$  непусто для любой непрерывно дифференцируемой функции  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Если для некоторой непрерывно дифференцируемой функции  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  множество  $\mathcal{S}(f)$  состоит из единственной точки  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что выполняется следующее. Для любой непрерывно дифференцируемой функции  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой*

$$\max_{(x,y) \in X \times Y} |f(x, y) - g(x, y)| < \delta,$$

*имеет место соотношение*

$$\mathcal{S}(g) \cap B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon) \neq \emptyset.$$

*Здесь  $B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$  — это открытая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $(\bar{x}, \bar{y})$  в пространстве  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .*

### 3. Заключение

Необходимые условия типа (2) могут использоваться наряду с условиями типа (1) для исследования седловых точек гладких функций. Так, например, если множество точек, удовлетворяющих (1), не пересекается с множеством точек, удовлетворяющих (2), то седловые точки у функции отсутствуют.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (Проект № 25-21-00525), <https://rscf.ru/project/25-21-00525/>.

## Список литературы

1. *Clarke F.* Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. London: Springer-Verlag, 2013.
2. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.
3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Об устойчивости седловых точек // Мат. заметки. 2025. Т. 118, № 6. С. 824–843.

## On Necessary Conditions for Saddle Points

*A. V. Arutyunov, Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Russia  
arutyunov@cs.msu.ru, zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

In this paper, we formulate new necessary conditions for a saddle point. A comparison of the proposed necessary conditions with the known ones is provided. An assertion on the stability of points satisfying the necessary conditions is formulated.

---

УДК 517.977

## Модификация закона линейного тангенса для учета нижнего ограничения на положение объекта

*А. В. Арцибасов, С. А. Решмин*

ИПМех им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
artsibasov@ipmnet.ru, reshmin@ipmnet.ru

Настоящая работа посвящена задаче траекторной оптимизации движения динамического объекта, в начальный момент времени отдаляющегося от целевой прямолинейной траектории. Для учета нижнего фазового ограничения на положение объекта предложена модификация закона линейного тангенса.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, модификация закона линейного тангенса

### 1. Введение

Рассматривается динамический объект, совершающий плоское движение и имеющий постоянную по модулю тягу. Управляющей величиной является угол наклона тяги объекта. Целью управления является

выведение объекта на заданную прямолинейную траекторию и максимизация продольной скорости объекта в конечный момент времени. На положение объекта также наложены фазовые ограничения. Для решения задачи используется закон линейного тангенса, возникший во многих работах, в частности в [1] и [2], и являющийся оптимальным решением задачи без фазовых ограничений. Специфика работы состоит в предположении отдаления объекта от требуемой траектории в начальный момент времени. Противоположное допущение о начальном значении скорости рассмотрено в статье [3].

## 2. Постановка задачи

Уравнения движения объекта имеют вид

$$(1) \quad \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = a \cos u, \quad \dot{v}_y = a \sin u.$$

Здесь  $a$  — модуль ускорения объекта, а  $u$  — угол наклона тяги.

Заданы начальные условия на координаты и проекции скорости

$$(2) \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v_x(0) = v_{x0}, \quad v_y(0) = v_{y0} \leq 0.$$

Условие достижения желаемой траектории задается равенствами

$$(3) \quad y(T) = h > 0, \quad v_y(T) = 0,$$

где  $T$  — фиксированный конечный момент времени. На координату  $y$  наложены фазовые ограничения

$$(4) \quad 0 \leq y(t) \leq h.$$

Функционал качества управления имеет вид

$$(5) \quad J = -v_x(T) \rightarrow \min.$$

## 3. Границы применимости закона линейного тангенса

Идея решения задачи состоит в использовании закона линейного тангенса, имеющего следующий вид:

$$(6) \quad u(t) = \arctg(-Ct + \operatorname{tg} u_0), \quad t \in [0, T].$$

Константы  $C$  и  $u_0$  в (6) определяются из терминальных условий (3).

Было выявлено (см. [2]), что при  $v_{y0} = 0$  управление (6) не нарушает условия (4). При  $v_{y0} < 0$  линейный тангенс (6) решает задачу

только при небольших значениях  $T$ : для каждого  $y_0$  и  $v_{y0}$  определено свое критическое время  $T_*$ , при превышении которого нижнее ограничение в (4) нарушается. Величина  $T_*$  определяется из уравнения

$$(7) \quad z + \frac{z^2 - 1}{2} G_0[\rho(z)] = \alpha,$$

где введены функции

$$G_0[s] = \frac{1}{s} - \frac{1 - s^2}{2s^2} \ln \left[ \frac{1 + s}{1 - s} \right],$$

$$\rho(z) = \frac{1 - \sqrt{(G_0[1/z] + \mu)^2 - \mu^2 + 1}}{2\mu + G_0[1/z]}$$

и безразмерные параметры

$$z = \frac{aT_*}{v_{y0}}, \quad \mu = \frac{2ay_0}{v_{y0}^2}, \quad \alpha = \frac{2a(h - y_0)}{v_{y0}^2}.$$

#### 4. Модификация закона линейного тангенса

Если определяемое из уравнения (7) значение  $T_* \geq T$ , то управление (6) дает решение задачи (1)–(5). Если  $T_* < T$ , то предлагается использовать линейный тангенс (с константами  $C_1$  и  $u_{01}$ ) для достижения границы  $y = 0$  в некоторый момент времени  $t_1 \in (0, T)$ , а затем использовать этот же закон управления, но с другими константами  $C_2$  и  $u_{02}$ , для достижения терминальных условий (3). Отметим, что второй этап движения соблюдает условия (4), поскольку стартует с нулевой поперечной скоростью. Идеей для создания модификации послужила общая теория оптимального управления при наличии фазовых ограничений [4].

Момент  $t_1$  подбирается из условия непрерывности получаемого управления, что приводит к следующему уравнению для  $t_1$ :

$$(8) \quad \frac{\zeta G_0^{-1} \left[ \frac{2(\zeta + \mu)}{\zeta^2 - 1} \right] - 1}{\zeta - G_0^{-1} \left[ \frac{2(\zeta + \mu)}{\zeta^2 - 1} \right]} = G_0^{-1} \left[ \frac{2(\alpha + \mu)}{(\zeta - \sigma)^2} \right],$$

где введены параметры

$$\zeta = \frac{at_1}{v_{y0}}, \quad \sigma = \frac{aT}{v_{y0}}.$$

Функцию  $G_0^{-1}(\cdot)$  предлагается приближать с помощью метода обратной интерполяции. Было доказано существование и единственность решений уравнений (7) и (8). Численные расчеты показали, что выбор  $t_1$  из условия непрерывности дает наименьшее значение функционала  $J$ .

## 5. Заключение

Решена задача траекторной оптимизации движения динамического объекта. Получена модификация закона линейного тангенса для учета не только верхнего ограничения на положение объекта, но и нижнего.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (Проект № 23-11-00128), <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

## Список литературы

1. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физ. наук. 1957. Т. 63. № 1. С. 5–32.
2. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
3. *Reshmin S.A., Bektybaeva M.T.* Accounting for Phase Constraints During Intensive Acceleration by Modified Linear Tangent Law // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59. No. 8. P. 3913–3928.
4. *Гамкрелидзе Р.В.* Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. № 3. С. 315–356.

## Modification of the Linear Tangent Law to Account for the Lower Constraint on an Object's Position

*A. V. Artsibasov, S. A. Reshmin*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
artsibasov@ipmnet.ru, reshmin@ipmnet.ru

This paper addresses the problem of optimizing the motion trajectory of a dynamic object that, at the initial time, is moving away from the target straight-line path. To account for the lower phase constraint on the object's position, a modified linear tangent law is proposed.

---

## Об устойчивости нижнего равновесия тяжелого двойного маятника, нагруженного следящей силой

*А. Е. Байков, А. Ю. Майоров*

МАИ (НИУ), Москва, Россия  
alexander@baikov.org, ylam123@gmail.com

Рассматривается двойной маятник, состоящий из двух однородных стержней, находящийся в однородном постоянном поле тяжести. Маятник может двигаться в фиксированной вертикальной плоскости. На его свободный конец действует постоянная по модулю следящая сила. Исследуется устойчивость нижнего равновесия маятника. Построена область устойчивости в линейном приближении. Получена нормальная форма уравнений движения маятника. Получены достаточные условия устойчивости по Ляпунову нижнего равновесия и построены соответствующие области в пространстве параметров.

*Ключевые слова:* двойной маятник, следящая сила, устойчивость в линейном приближении, устойчивость по Ляпунову, обратимые системы, нормальная форма, КАМ-теория

### 1. Введение

Движение механических систем, стесненных голономными связями, может быть задано уравнениями Лагранжа второго рода. После введения обобщенных импульсов  $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , уравнения движения примут явный вид

$$(1) \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2} \mathbf{p}^\top \frac{\partial M^{-1}}{\partial q_i} \mathbf{p} + Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \dot{\mathbf{q}} = M^{-1} \mathbf{p}.$$

Здесь  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^\top$  — обобщенные координаты,  $n$  — число степеней свободы,  $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$  — кинетическая энергия,  $M = M(\mathbf{q})$  — положительно определенная кинетическая матрица,  $Q_i$  — обобщенные силы. Если обобщенные силы  $Q_i$  зависят только от обобщенных координат, то система (1) обратима относительно стандартной инволюции  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \mapsto -\mathbf{p}, \mathbf{q}$ .

Самый известный пример лагранжевой системы (1) с неконсервативными позиционными силами — двухзвенная стержневая система, нагруженная следящей силой [1]. Она связана с открытием парадокса

дестабилизации, когда устойчивое в линейном приближении равновесие становится неустойчивым при добавлении в систему малых сил трения. Абстрактные обратимые системы исследовались в [2]. Обратимые системы в механике, частным случаем которых служит система (1), изучались в [3].

Будем предполагать, что система (1) имеет изолированное равновесие  $\mathbf{p} = 0$ ,  $\mathbf{q} = 0$ , устойчивое в линейном приближении, и уравнение частот малых колебаний имеет  $n$  положительных корней. При  $n = 2$  одно достаточное условие устойчивости по Ляпунову равновесия  $\mathbf{p} = 0$ ,  $\mathbf{q} = 0$ , обобщающее классическую теорему Арнольда–Мозера для гамильтоновых систем, основанное на КАМ-теории обратимых систем, доказано в [4]. Некоторые условия устойчивости и неустойчивости по Ляпунову тривиального равновесия линейных неконсервативных систем были получены в [5]. В работе мы планируем применить эти теоремы для конкретной механической системы вида (1).

## 2. Основной результат

Двойной маятник состоит из двух однородных стержней  $OA$  и  $AB$  с массами  $m_1$ ,  $m_2$  и длинами  $l_1$ ,  $l_2$  соответственно. Стержни находятся в однородном постоянном поле тяжести с ускорением  $\mathbf{g}$ . На свободный конец  $B$  стержня  $AB$  действует постоянная по модулю следящая сила  $\mathbf{F}$ , образующая с  $\mathbf{AB}$  угол  $\alpha = \pi$  или угол  $\alpha = 0$  все время движения. Маятник может двигаться в фиксированной вертикальной плоскости.

Уравнения движения приведены к безразмерному виду. За единицу измерения времени принята величина  $T_* = \sqrt{\frac{l_1+l_2}{g}}$ ; введены параметры маятника  $\sigma = \frac{l_2}{l_1+l_2}$ ,  $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$  и параметр следящей силы  $f = \pm \frac{F}{(m_1+m_2)g}$ , где знак «+» относится к первому случаю ( $\alpha = \pi$ ), знак «-» — ко второму ( $\alpha = 0$ ). За обобщенные координаты приняты углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые  $\mathbf{OA}$  и  $\mathbf{AB}$  образуют с нисходящей вертикалью.

Отметим два особых значения параметра следящей силы:  $f = f_*$  и  $f = -f_*$ , где  $f_* = \frac{1+\mu}{2}$ . Если  $f = f_*$ , то система имеет бесконечное множество положений равновесия с произвольным  $\varphi_1$  и  $\varphi_2 = 0$ . При  $f = -f_*$  положениями равновесия являются все пары  $(\varphi_1, \pi)^\top$  с произвольным  $\varphi_1$ . При  $f \neq f_*$  и  $f \neq -f_*$  система имеет только четыре положения равновесия на конфигурационном торе.

Исследуется устойчивость нижнего равновесия двойного маятника  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 0$ . Несложный анализ показывает, что устойчивость в

линейном приближении имеет место, когда  $f < f^{(1)}$ , где

$$f^{(1)} = \frac{4\sigma^2 - (5 + 4\mu)\sigma + 3 + 6\mu - \sqrt{3\sigma(1 - \sigma)^2(4 - \mu)(1 + \sigma - \mu)}}{(3 - \sigma)^2}.$$

Поверхность  $f = f^{(1)}$  в пространстве параметров соответствует резонансу 1 : 1 частот малых колебаний. При  $f > f^{(1)}$  нижнее равновесие маятника неустойчиво.

Для строгого нелинейного анализа устойчивости уравнения движения нормализованы с помощью некоторой линейной замены и метода Хори–Кэмила. Нормальные формы получены как в нерезонансном случае, так и при резонансах малых порядков. На основании теоремы из [4] и явного выражения коэффициентов нерезонансной нормальной формы через параметры задачи получены области в пространстве параметров, в которых нижнее равновесие двойного маятника устойчиво по Ляпунову.

#### Список литературы

1. *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. Vol. 20. P. 49–56.
2. *Sevryuk M.B.* Reversible systems. Ser. Lect. Notes Math. V. 1211. Berlin: Springer, 1986.
3. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // Прикл. матем. и мех. 1991. Т. 55. № 4. С. 578–586.
4. *Матвеев М.В.* Устойчивость по Ляпунову положений равновесия обратимых систем // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 90–104.
5. *Козлов В.В.* Об устойчивости равновесий в псевдоримановом пространстве // УМН. 2025. Т. 80. № 1(481). С. 59–84.

### On the Stability of the Lower Equilibrium of a Heavy Double Pendulum Loaded by a Follower Force

*A. E. Baikov, A. Y. Mayorov*

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
alexander@baikov.org, ylam123@gmail.com

A double pendulum in a constant uniform gravity field is considered. It consists of two homogeneous rods and is constrained to move in a fixed vertical plane. A follower force of constant magnitude acts upon its free end. The stability of the lower equilibrium is investigated. The linear approximation stability domain is constructed. The normal form of the

equations of motion is obtained. Sufficient conditions for Lyapunov stability of the lower equilibrium are obtained and the corresponding domains in the parameter space are constructed.

---

УДК 517.93:531.36

## **Параллельная структура агрегирования консервативных систем с колебаниями**

*И. Н. Барабанов, В. Н. Тхай*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
ivbar@ipu.ru, tkhai@ipu.ru

Рассматривается множество  $\Xi$  консервативных систем, каждая из которых допускает одночастотное колебание. Решается задача конструирования на базе  $\Xi$  связанной системы, обладающей стабилизированным колебанием: одночастотным или многочастотным. В параллельной структуре агрегирования системы являются равноправными, связи двусторонними. Применяется управление с отслеживанием потенциальной энергии в цепи обратной связи.

*Ключевые слова:* консервативная система, колебание, агрегирование, стабилизация

### **1. Введение**

Агрегирование заключается в конструировании связанной системы с желаемым динамическим свойством на базе данного множества  $\Xi$  систем. При агрегировании одновременно решаются две взаимосвязанные задачи: конструирование и управление.

Задача стабилизации связанной системы, созданной на базе множества  $\Xi$  консервативных систем с одной степенью свободы с колебаниями, решалась в [1]. При этом задача конструирования и стабилизации колебания связанной системы решалась единым управлением; агрегировалась система с одночастотным колебанием. Применялось управление, которое подходит как для одной подсистемы, так и любого числа подсистем. В связанной системе все подсистемы оставались равноправными: получается параллельная структура. В ней применяются двухсторонние связи, а агрегирование проводится автономным управлением с малым коэффициентом усиления регулятора. В [1] использовалось

управление типа Ван дер Поля.

Задача агрегирования параллельной структуры актуальна для современных приложений.

## 2. Основной результат

Рассматривается множество  $\Xi$  консервативных систем

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^s}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^s}{\partial q_j} = 0, \quad s = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n_s,$$

каждая из которых допускает в равновесии локальное ляпуновское семейство периодических движений: выполняется теорема Ляпунова о центре [2]. Это семейство продолжается на глобальное семейство периодических движений [6]. Ставится задача агрегирования множества систем (1) в связанную систему, обладающую изолированным стабилизированным колебанием.

Колебание связанной системы может быть одночастотным: изолированное колебание будет циклом, а множество  $\Xi$  необходимо допускает, как одно целое, периодическое движение. Случай изучен в [1] без акцента на сдвиги в колебаниях в подсистемах. Однако результат остается справедливым и при учете сдвигов фаз.

Изолированное колебание связанной системы может иметь  $k$  частот:  $k \geq 1$ . В таком случае можно ограничиться изучением в (1) только  $k$  систем. В конечном счете, самой общей задачей становится агрегирование системы с  $n$ -частотными колебаниями на множестве  $\Xi$  с несоизмеримыми частотами.

Доказана теорема, охватывающая все возможные случаи.

**Теорема 1.** *Задача агрегирования множества  $\Xi$  консервативных систем (1), допускающих колебания, решается в адаптивной схеме стабилизации*

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^s}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^s}{\partial q_j} = \varepsilon [1 - K\Pi(q)] \frac{\partial T^s}{\partial \dot{q}_j}, \quad s = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n_s,$$

в которой  $\Pi(x)$  — потенциальная энергия множества  $\Xi$  как одного целого,  $T^s$  — кинетическая энергия  $s$ -й системы, число  $K$  выбирается в зависимости от значения полной энергии  $h = h^*$  множества  $\Xi$  для стабилизируемого колебания агрегируемой системы,  $\varepsilon$  — малый коэффициент усиления регулятора. В системе (2) стабилизируются все  $k$ -частотные колебания:  $k \geq 1$ ; траектории притягиваются в большом по  $h$  и в малом в окрестности стабилизируемого колебания. Агрегирование проводится с учетом фаз колебаний в системах.

*Замечания.* 1°. Стабилизируются как одночастотные, так и многочастотные колебания агрегированной системы. При этом по времени стабилизируется только одно колебание. 2°. В правой части равенства (2) стоит управление, предложенное в случае одной системы в [4]. Здесь в цепи обратной связи отслеживается текущая потенциальная энергия. 3°. Применяемое управление является универсальным. 4°. В системе орбитальной стабилизации системы спутников стабилизация происходит за счет просто движения в гравитационном поле Земли, а потенциальная энергия дается расстоянием от земной поверхности.

### 3. Заключение

Многочастотный режим колебаний системы со сдвигами фаз в колебаниях подсистем является самым общим при агрегировании множества  $\Xi$  консервативных систем, допускающих каждая одночастотное колебание. Применением управления, в котором отслеживается потенциальная энергия в цепи обратной связи, учитывается природа консервативной системы. Агрегирование в данной постановке задачи охватывает наибольший круг приложений.

#### Список литературы

1. *Барабанов И.Н., Тхай В.Н.* Стабилизация цикла в связанной механической системе // *АиТ.* 2022. № 1. С. 67–76.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // *Собр. соч.* М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
3. *Тхай В.Н.* Адаптивная схема стабилизации колебаний автономной системы // *АиТ.* 2024. № 9. С. 77–92.
4. *В.Н. Тхай.* Стабилизация колебаний в автономной скорректированной консервативной системе путем конструирования притягивающего цикла // *АиТ.* 2025. № 6. С. 43–60.

### Parallel Structure of Aggregation of Conservative Systems with Oscillations

*I. N. Barabanov, V. N. Tkhai*

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science,  
Moscow, Russia  
ivbar@ipu.ru, tkhai@ipu.ru

A set  $\Xi$  of conservative systems with single-frequency oscillations is considered. The problem of constructing a coupled system based on  $\Xi$  with stabilized oscillations, either single- or multi-frequency, is solved. In a parallel structure, the systems are equal, and the couplings are two-way. Potential energy tracking control is used in the feedback loop.

## Об одной модели развивающихся систем в энергетике

*Е. А. Баракhtенко*<sup>1</sup>, *Е. В. Маркова*<sup>1</sup>, *Е. А. Прокофьев*<sup>1,2</sup>,  
*П. Ю. Солодуша*<sup>1,2</sup>

ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия<sup>1</sup>

ИГУ, Иркутск, Россия<sup>2</sup>

barakhtenko@isem.irk.ru, markova@isem.irk.ru, aserinia@mail.ru,  
peter.solodusha@mail.ru

Рассматривается задача оценки развития локальной энергосистемы, включающей возобновляемые источники энергии. Используется агрегированный подход, основанный на применении двухсекторной имитационной модели В. М. Глушкова. Предложена замкнутая математическая модель, операторы Вольтерра в которой имеют переменные пределы интегрирования.

*Ключевые слова:* развивающаяся динамическая система, интегральные уравнения Вольтерра, электроэнергетика

### 1. Введение

Как хорошо известно, энергетическая отрасль является одной из ведущих отраслей экономики любой страны. Согласно [1], по состоянию на 2023 год в Российской Федерации 54% установленных мощностей превысили пределы нормативного срока службы. В связи с этим несомненно актуальность оценки состояния и модернизации энергетической инфраструктуры.

В работе рассматривается задача обновления оборудования локальной электроэнергетической системы (ЭЭС) за счет использования возобновляемых источников солнечной и ветровой энергетики. В методическом плане обеспечение энергоснабжения является комплексной проблемой, так как требует исследования технических аспектов эксплуатации оборудования, изучения технико-экономической эффективности стратегий технического перевооружения оборудования, а также учет экологических характеристик функционирования ЭЭС.

## 2. О специфике задачи

В силу сложности задачи оправдано привлечение агрегированного подхода, основанного на теории обобщенных динамических систем [2]. Математические концепции, разработанные В. М. Глушковым, направлены на создание универсальных автоматизированных систем управления и систем поддержки принятия решений. Особенность данных научных подходов состоит в привлечении макроэкономических моделей для описания развивающихся динамических процессов. Для поддержания баланса между генерацией электроэнергии и ее потреблением дополнительно включена подзадача оценки состояния аккумуляторных батарей [3].

Сформированная авторами математическая модель включает уравнения Вольтерра I и II рода, основная особенность которых — переменные нижние и верхние пределы интегрирования [4], что позволяет учесть динамику изменения возрастной структуры оборудования.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проекты FWEU-2026-0013, FWEU-2026-0015).

### Список литературы

1. Болкунов Г., Трифонова В., Волкова А. Электроэнергетика в России // Вестник Атомпрома. 2025. № 4. С. 6–11.
2. Глушков В.М. Обобщенные динамические системы и прецессионное прогнозирование // Теоретическая кибернетика. 1970. Вып. 5. С. 3–8.
3. Zafar M.H., Khan N.M., Houran V.A., Mansoor M., Akhtar N., Sanfilippo F. A Novel Hybrid Deep Learning Model for Accurate State of Charge Estimation of Li-Ion Batteries or Electric Vehicles under High and Low Temperature // Energy. 2024. V. 292. P. 130584.
4. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.

### On a Model of Developing Systems in the Energy Sector

*E. A. Barakhtenko*<sup>1</sup>, *E. V. Markova*<sup>1</sup>, *E. A. Prokofiev*<sup>1,2</sup>,  
*P. Yu. Solodusha*<sup>1,2</sup>

Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, Russia<sup>1</sup>

Irkutsk State University, Irkutsk, Russia<sup>2</sup>

barakhtenko@isem.irk.ru, markova@isem.irk.ru, aserinia@mail.ru,

peter.solodusha@mail.ru

The problem of assessing the development of a local energy system that includes renewable energy sources is considered. An aggregated approach

is employed, based on a two-sector simulation model proposed by V. M. Glushkov. A closed mathematical model is proposed in which the Volterra operators have variable integration limits.

---

УДК 517.977

## **Задача управления лазерным воздействием на двухслойный биоматериал с промежуточными условиями**

*В. Р. Барсегян*

Институт механики НАН Армении, ЕГУ, Ереван, Армения  
barseghyan@sci.am

Рассматривается двухслойный биологический объект, состоящий из двух неоднородных по своим теплофизическим характеристикам слоев, подвергаемый действию на него лазерного излучения. Разработан конструктивный подход построения функции управления тепловым воздействием лазерного луча на биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния из начального состояния на заданном промежутке времени переходит в конечное состояние, обеспечивая выполнение нелокальных условий.

*Ключевые слова:* двухслойный биологический материал, лазерное воздействие, температурное состояние, граничное управление, промежуточные условия, метод разделения переменных

### **1. Введение**

Биологический материал, находящийся под воздействием лазерного излучения, является системой с распределенными параметрами [1–4]. Для обработки биологических материалов возникает необходимость выработки способов воздействия и критериев для параметров лазерных излучателей. В последние годы активно разрабатываются различные математические модели для решения разных задач выбора режимов теплового воздействия лазерного луча на биологический объект. При этом способы эффективных режимов воздействия лазерного излучения на многослойную биологическую среду пока еще недостаточно исследованы [3]. Поэтому необходимо проведение исследований по поиску режимов лазерного воздействия для развития возможностей лазерной обработки многослойной биологической среды.

## 2. Об основных результатах

В соответствии с многослойной структурой биоматериала [1, 2] в случае, когда временные и пространственные параметры функции распределения объемной плотности мощности тепловых нагрузок в биоматериале и коэффициенты теплопроводности постоянные, дифференциальное уравнение сводится к уравнению теплопроводности:

$$(1) \quad \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{K_1}{\rho_1 c_1} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}, & z \in [0, l_1], \\ \frac{K_2}{\rho_2 c_2} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}, & z \in [l_1, l_1 + l_2], \end{cases}$$

где  $\rho_j$  — коэффициент плотности  $j$ -го слоя биоматериала,  $j = 1, 2$ ;  $c_j$  — коэффициент теплоемкости;  $T(z, t)$  — температурное поле в биоматериале;  $z$  — глубина проникновения лазерного луча;  $t$  — длительность теплового воздействия;  $K_j$  — коэффициент теплопроводности.

Пусть граничные условия, теплового воздействия следующие:

$$(2) \quad T(z, t)|_{z=0} = u(t), \quad T(z, t)|_{z=l_1+l_2} = P(t),$$

где  $u(t)$  — температура действия лазерного луча на левой границе двухслойного биоматериала, которая изменяется по времени (управляющее воздействие);  $P(t)$  — температура действия лазерного луча на правой границе биоматериала, которая считается известной.

Условия сопряжения между слоями следующие:

$$T(z, t)|_{z=l_1-0} = T(z, t)|_{z=l_1+0}, \quad K_1 \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l_1-0} = K_2 \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=l_1+0}.$$

Предполагается, что заданы начальное условие

$$(3) \quad T(z, t)|_{t=t_0} = \varphi_1(z) = \varphi_0(z)$$

и конечное условие

$$(4) \quad T(z, t)|_{t=T_0} = \varphi_2(z) = \varphi_T(z).$$

Чтобы избежать появления нежелательных тепловых состояний в биоматериале, необходимо контролировать интенсивность лазерного воздействия, например, это можно обеспечить, налагая на температурное поле в биоматериале некоторые ограничения типа нелокальных условий. Пусть заданы моменты времени  $t_k$  ( $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T_0$ )

и на значения функции температуры наложены нелокальные многоточечные промежуточные условия в виде

$$(5) \quad \sum_{k=1}^m f_k T(z, t_k) = \alpha(z), \quad z \in [0, l_1 + l_2],$$

где  $f_k$  — заданные величины,  $\alpha(z)$  — известная функция. Функция  $\alpha(z)$  характеризует суммарное допустимое температурное состояние для моментов времени  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Предположим, что известны значения  $T(0, t_k)$ , т.е.  $T(0, t_k) = \varphi_k$ .

Управление процессом теплового воздействия лазерного луча на биоматериал осуществляется следующим образом: изменяя на левой границе двухслойного биоматериала (при  $z = 0$ ) интенсивность лазерного луча влияем тем самым на тепловое состояние в биоматериале.

Полагаем, что допустимое управление  $u(t) \in L_2[t_0, T_0]$ ,  $T(z, t) \in L_2(\Omega)$ , где  $\Omega = \{(z, t) : z \in [0, l_1 + l_2], t \in [t_0, T_0]\}$ , а  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(z)$  и  $\alpha(z)$  принадлежат  $L_2(0, l_1 + l_2)$ , кроме того, все функции такие, что выполняются условия согласования.

Требуется найти такой закон управления  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, T_0]$ , (2) теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния (1), из начального состояния (3) на промежутке времени  $[t_0, T_0]$  переходит в конечное состояние (4), обеспечивая удовлетворение условий (5).

Для решения задачи переходим к новой переменной [4]. Решение исходной задачи сводится к задаче управления процессом теплового воздействия лазерного луча на биоматериал, описываемым неоднородным уравнением с однородными граничными условиями и заданными начальным, конечным и промежуточными условиями. Используя метод разделения переменных [4, 5], получим, что искомые функции управления для каждой моды должны удовлетворять некоторым интегральным соотношениям. Далее на основе методов теории управления конечномерными системами для произвольного числа первых мод построены функции управления.

#### Список литературы

1. *Yamaoka N., Sugie J.* Multilayer Structures of Second-order Linear Differential Equations of Euler Type and Their Application to Nonlinear Oscillations // Ukrainian Mathematical Journal. 2006. V. 58. No. 12. P. 1935–1949.
2. *Мегель Ю.Е., Левкин Д.А.* Математическая модель теплового нагрева многослойного микробиологического объекта // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2012. Т. 57. № 3/4. С. 4–7.

3. *Shangina O.R., Gaynutdinova R.D.* Interaction of Laser Radiation with Biological Tissues // Practical medicine. 2019. V. 17. No. 1. P. 24–27.
4. *Barseghyan V.R., Solodusha S.V.* Model of the Control Problem of the Thermal Effect of a Laser Beam on a Two-Layer Biomaterial // Mathematics. 2021. V. 31(LXVII). No. 3. P. 481–493.
5. *Barseghyan V.R., Solodusha S.V.* The Problem of Boundary Control of the Thermal Process in a Rod // Mathematics. 2023. V. 11. № 13. P. 2881.

## **Control Problem of Laser Exposure on a Two-Layer Biomaterial with Intermediate Conditions**

*V. R. Barseghyan*

Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia,  
Yerevan State University, Yerevan, Armenia

A two-layer biological object consisting of two layers with non-homogeneous thermophysical characteristics, subjected to laser radiation, is considered. A constructive approach has been developed for constructing a control function for the thermal effect of a laser beam on a two-layer biomaterial, under the influence of which the distribution of the temperature state from a given initial state over a given time interval transitions to a given final state, ensuring the fulfillment of nonlocal conditions.

---

## Модель задачи граничного управления процессами теплопереноса в трубопроводе системы теплоснабжения

*В. Р. Барсегян<sup>1</sup>, О. А. Гребнева<sup>2</sup>, С. В. Солодуша<sup>2</sup>*

Институт механики НАН Армении, ЕГУ, Ереван, Армения<sup>1</sup>

ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия<sup>2</sup>

barseghyan@sci.am, oksana@isem.irk.ru, solodusha@isem.irk.ru

В работе рассмотрена задача граничного управления процессами теплопереноса в единичном изолированном трубопроводе системы теплоснабжения. Предполагается, что на одной из границ трубопровода задано желаемое распределение температуры. Предлагается конструктивный подход к построению функции управления температурным режимом, обеспечивающей формирование требуемого температурного режима, с использованием метода разделения переменных и методов теории управления конечномерными системами.

*Ключевые слова:* уравнение теплопроводности, граничное управление, теплоперенос, метод разделения переменных, трубопровод

### 1. Введение

Задачи управления тепловыми процессами в системах теплоснабжения характеризуются высокой сложностью, обусловленной протяженностью объектов, наличием температурных запаздываний и пространственной неоднородности температурных режимов. В связи с этим актуальным является построение и анализ упрощенных модельных задач, позволяющих исследовать фундаментальные свойства управляемости и устойчивости тепловых процессов.

В настоящее время получен ряд результатов, связанных с граничным управлением процессом теплопереноса. Рассматриваются различные постановки, использующие, в том числе, волновую теорию теплопроводности для описания быстропротекающих процессов [1], теорию нагруженных параболических уравнений [2], теорию дифференциальных игр при наличии неопределенности [3], а также теорию распределенного и централизованного (граничного) управления для формирования требуемого температурного состояния в заданном временном интервале [4, 5]. Настоящая работа посвящена постановке и анализу задачи граничного управления теплопереносом в отдельном элементе системы теплоснабжения — трубопроводе, которая обеспечивает формирование на одной из границ желаемого температурного режима.

## 2. Об основных результатах

Часто возникают задачи управления тепловыми процессами, в которых нужно сгенерировать желаемое температурное состояние. В статье предполагается, что температура в каждом поперечном сечении одинаковая, а теплообмен с окружающей средой отсутствует. В этих условиях для описания динамики процесса теплопереноса в трубе может использоваться одномерное уравнение теплопроводности [2–5]

$$(1) \quad \frac{\partial Z(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{K}{c\rho}, \quad x \in [0, l], \quad t \in [t_0, T],$$

где  $\rho$  – коэффициент плотности,  $c$  – коэффициент теплоемкости,  $K$  – коэффициент теплопроводности,  $Z(x, t)$  – температурное поле,  $x$  – координата по длине трубопровода,  $t$  – координата по времени. Предположим, что граничные условия процесса (1) следующие:

$$(2) \quad Z(x, t)|_{x=0} = u(t), \quad Z(x, t)|_{x=l} = P(t),$$

где  $u(t)$  – температура на левой границе, где находится источник тепла и которая поддается изменению по времени (управляющее воздействие), а  $P(t)$  – температура на правой границе (в конце) трубопровода, которая считается известной (желаемой), в частности,  $P(t) = \text{const}$ . Предполагается также, что для функции температурного состояния  $Z(t, x)$  заданы начальное (при  $t = t_0$ ) условие

$$(3) \quad Z(x, t)|_{t=t_0} = \varphi_0(x)$$

и конечное (при  $t = T$ ) условие

$$(4) \quad Z(x, t)|_{t=T} = \varphi_T(x).$$

Требуется найти такой закон управления  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , (2), т.е. режим теплового процесса, под воздействием которого распределение температурного состояния (1) в момент времени  $t = t_0$ , начавшая из начального состояния (3), на заданном промежутке времени  $[t_0, T]$  переходит в заданное конечное состояние (4), обеспечивая желаемое температурное состояние в конце трубы, т.е. выполнение условия  $Z(t, x)|_{x=l} = P(t)$ .

Предлагается конструктивный подход построения функции управления температурным режимом на границе трубопровода, под воздействием которого распределение температурного состояния в трубе пе-

реходит в заданное конечное состояние из известного начального состояния на ограниченном интервале времени. Схема построения граничного управления заключается в следующем: исходная задача с неоднородными граничными условиями сводится к математической задаче управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями. Далее с помощью метода разделения переменных и методов теории управления конечномерными системами для произвольного числа первых  $n$  мод построено граничное управление, которое представляется в явном аналитическом виде. Также сформулировано необходимое и достаточное условие полной управляемости для граничного управления температурным состоянием трубопровода при любых начальных и конечных условиях. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере.

### 3. Заключение

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления температурными режимами теплопередачи в физических и технологических системах. Предложенная в статье постановка задачи и подходы исследования могут служить основой для перехода к сложным и практически ориентированным задачам управления температурными режимами в системах теплоснабжения.

Исследование Солодуши С.В. и Гребневой О.А. выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проекты FWEU-2026-0013, FWEU-2026-0015).

### Список литературы

1. Романовский Р.К., Чурашева Н.Г. Оптимальное граничное управление теплопереносом в одномерном материале. Гиперболическая модель // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1256–1264.
2. *Imanberdiyev K.B., Kanguzhin B.E., Serik A.M., Uaissov B.* Boundary Control of Rod Temperature Field with a Selected Point// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2022. V. 114. No. 2. P. 9–25.
3. Ухоботов В.И., Измestъев И.В. Задача управления процессом нагрева стержня с неизвестными температурой на правом конце и плотностью источника тепла // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 297–305.
4. *Barsegyan V.R.* The Problem of Control of Rod Heating Process With Nonseparated Conditions at Intermediate Moments of Time // Archives of Control Sciences. 2021. V. 31(LXVII). No. 3. P. 481–493.
5. *Barseghyan V.R., Solodusha S.V.* The problem of boundary control of the thermal process in a rod // Mathematics. 2023. V. 11. № 13. P. 2881.

# Model of the Boundary Control Problem for Heat Transfer Processes in a Pipeline of Heat Supply System

*V. R. Barseghyan<sup>1</sup>, O. A. Grebneva<sup>2</sup>, S. V. Solodusha<sup>2</sup>*

Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia,  
Yerevan State University, Yerevan, Armenia<sup>1</sup>

Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, Russia<sup>2</sup>  
barseghyan@sci.am, oksana@isem.irk.ru, solodusha@isem.irk.ru

This article studies the problem of boundary control of heat transfer processes in a single insulated pipeline of a heat supply system. It is assumed that a desired temperature distribution is specified at one of the pipeline's boundaries. Using the variables separation method and methods of finite-dimensional systems control theory, a constructive approach to constructing a temperature control function that ensures the required temperature state is achieved is proposed.

---

УДК 531.396

## Оценка точности приближенных непрерывных моделей силы трения

*М. В. Беличенко, Н. А. Петров*

МАИ (НИУ), Москва, Россия  
tuzemec1@rambler.ru, cz.misha@bk.ru

В работе исследуется корректность и точность приближенных непрерывных моделей силы трения. На примере движения вибрационного робота с подвижной внутренней массой, движущейся вдоль наклонной прямой, проведена оценка точности трех моделей силы трения.

*Ключевые слова:* вибрационный робот, модель силы трения, численное моделирование

### 1. Введение

Исследованию движения вибрационных роботов посвящено множество работ. В них в большей степени рассматриваются задачи качественного исследования поведения механических систем с подвижными внутренними массами по одномерной [1, 1, 3] или двумерной плос-

кости [4], а также задачи оптимального управления движением внутренних масс для обеспечения более эффективного движения корпуса [5]. Однако, вопросы практического применения подобных роботов требуют исследования сложных систем с большим количеством параметров. Исследование системы с множеством точек контакта является сложной задачей, что вместе с большим количеством параметров системы требует численного моделирования. Для упрощения такого моделирования требуется упростить модель силы трения Кулона, в которой имеется разрыв и режим залипания, приводящий к уменьшению числа степеней свободы. В данной работе будет рассмотрен вопрос о точности и корректности использования непрерывных моделей силы трения.

## 2. Основной результат

Сила трения Кулона  $F$  описывается системой уравнений

$$(1) \quad \begin{cases} F = -fN\text{sign}\dot{x}, & \dot{x} \neq 0, \\ F = -F_v\text{sign}\dot{x}, & \dot{x} = 0, F_v < fN, \\ F = -fN\text{sign}\dot{x}, & \dot{x} = 0, F_v \geq fN. \end{cases}$$

Здесь  $f$  — коэффициент трения,  $N$  — нормальная реакция между взаимодействующими телами,  $\dot{x}$  — относительная скорость тел в точке контакта,  $F_v$  — возмущающая сила. Такая модель силы трения при  $\dot{x} = 0$ ,  $F_v < fN$  уменьшает количество степеней свободы системы, что требует дополнительного исследования и введения альтернативных уравнений движения механической системы.

Во избежание таких сложностей при численном моделировании сложных систем с большим количеством точек контакта предлагается использовать непрерывную по  $\dot{x}$  модель силы трения  $F(\dot{x})$ . Предполагается, что

$$F = -fNg(\dot{x}),$$

где функция  $g(\dot{x})$  непрерывна по  $\dot{x}$ . При значительных значениях  $\dot{x}$  она принимает значения  $\text{sign}\dot{x}$  (или стремится к ним). В данной работе рассмотрены три вида функции  $g(\dot{x})$  (рис. 1)

$$g_1 = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{15\pi}{16a}\dot{x}\right), \quad g_2 = \begin{cases} \frac{15}{8a}\dot{x}, & |\dot{x}| < \frac{8a}{15}, \\ \text{sign}\dot{x}, & |\dot{x}| \geq \frac{8a}{15}. \end{cases}$$

$$g_3 = \begin{cases} \frac{15}{8a}\dot{x} - \frac{10}{8a^3}\dot{x}^3 + \frac{3}{8a^5}\dot{x}^5, & |\dot{x}| < a, \\ \text{sign}\dot{x}, & |\dot{x}| \geq a. \end{cases}$$

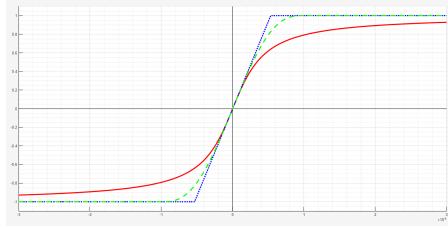


Рис. 1: Графики непрерывных моделей силы трения

Здесь  $a$  — малое значение скорости  $\dot{x}$ , которое может быть подобрано для обеспечения требуемой точности моделирования.

Модель трения  $g_1$  проста в описании и непрерывна, но никогда не достигает значений  $\text{sign}\dot{x}$ , асимптотически приближаясь к ним. Модель  $g_2$  линейна, что приводит к двум точкам излома, что может привести к проблемам при численном интегрировании уравнений движения. Модель  $g_3$  представлена полиномом пятой степени, что приводит к устранению излома и «мягкого удара». Коэффициенты данных моделей подобраны, чтобы обеспечить одинаковое максимальное значение производной при  $\dot{x} = 0$ .

Точность работы указанных непрерывных моделей силы трения была проверена на исследованной ранее задаче о движении вибрационного робота с внутренней массой,двигающейся относительно корпуса по наклонной прямой.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (Проект № 24-1100162), <https://rscf.ru/project/24-1100162/>.

#### Список литературы

1. *Бардин Б.С., Панев А.С.* О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. Т. 84.
2. *Bardin B.S., Rachkov A.A.* On Periodic Motions of a Body With an Internal Moving Mass on a Rough Horizontal Plane in the Case of Anisotropic Friction // Journal of Physics: Conference Series 1959. 2021. 012005.

3. *Бардин Б.С., Рачков А.А., Чекина Е.А., Чекин А.М.* О периодических режимах движения тела по горизонтальной шероховатой плоскости, реализуемых посредством перемещения двух внутренних масс // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16. № 1. С. 17–34.
4. *Черноузько Ф.Л.* Управление плоскими движениями тела при помощи подвижной массы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. № 4. С. 414–425.
5. *Черноузько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2022.

### **Estimation of the Accuracy of Approximate Continuous Friction Force Models**

*M. V. Belichenko, N. A. Petrov*

Moscow Aviation Institute (National research university), Moscow, Russia  
tuzemec1@rambler.ru, cz.misha@bk.ru

We consider the correctness and accuracy of approximate continuous models of the friction force. Using the example of the motion of a vibrating robot with a internal mass moving along an inclined straight line, the accuracy of three models of friction force is estimated.

---

## Достаточное условие оптимальности в задаче наискорейшего разгона/остановки несинхронных осцилляторов

*Л. М. Берлин*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
berlin.lm@phystech.edu

Рассматривается задача оптимального разгона и остановки системы, состоящей из произвольного числа несинхронных осцилляторов с общим скалярным ограниченным управлением, по критерию быстродействия. Помимо условий принципа максимума ранее получены условия невырожденности оптимального управления, обеспечивающие решение для произвольного заданного числа неизвестных моментов переключения. Доказано, что полученные соотношения являются достаточными условиями оптимальности в случае разгона и остановки.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, задача быстродействия, принцип максимума Понтрягина, несинхронные осцилляторы

### 1. Введение

Задачи оптимального управления многочастотными колебательными системами по критерию быстродействия сформулированы в монографии Ф.Л. Черноусько [1]. Фундаментальным источником по теории оптимального управления является монография Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко [2]. В ней изложены необходимые условия оптимальности и результаты о существовании и единственности решений для линейных оптимальных быстродействий, на которые, в частности, опирается настоящий доклад. Данная работа посвящена исследованию полученных в [3] дополнительных условий невырожденности.

### 2. Основной результат

Динамика управляемой системы осцилляторов с различными частотами  $\omega_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , описывается следующей системой с ограничением:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{q}_i(t) = p_i(t), \\ \dot{p}_i(t) = -\omega_i^2 q_i(t) + u(t), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

$$(2) \quad u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] = \mathbb{U}, \quad u \in \mathcal{L}^\infty(0, T^0).$$

Требуется перевести систему (1) с управлением (2) и вектором  $\mathbf{x}(t) = (q_1(t), p_1(t), \dots, q_N(t), p_N(t))^T$  из  $\mathbf{x}_0$  в  $\mathbf{x}_{T^0}$  за минимальное время

$$(3) \quad T^0[u] = \int_0^{T^0} dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Для системы (1)-(2) построено в [3] соответствие между решениями задачи разгона  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \dots, 0, 0)^T$  и остановки  $\mathbf{x}_{T^0} = (0, 0, \dots, 0, 0)^T$ .

**Следствие 1.** *Траектории в задаче (1)-(2) перехода из точки  $\mathbf{x}_0 = (q_1^*, p_1^*, \dots, q_N^*, p_N^*)$  в начало координат  $\mathbf{x}_{T^0} = \mathbf{0}$  с управлением  $u(t)$  за время  $T^0$  соответствует траектория, ведущая из начала координат в точку  $\mathbf{x}_{T^0} = (q_1^*, -p_1^*, \dots, q_N^*, -p_N^*)$  с управлением  $u(T^0 - t)$ .*

Для управлений в исследуемой задаче (1)-(3) верно замечание, справедливость которого следует из раздела о линейных оптимальных быстродействиях монографии [2].

*Замечание 1.* Оптимальное управление в линейной задаче быстродействия (1)-(3) единственно для любых начальных и конечных состояний системы.

Также результат о единственности экстремального управления в задаче остановки в указанной монографии был усилен:

**Лемма 1.** *Экстремальное управление в задаче остановки и разгона (1)-(3) единственно.*

Оптимальное управление, полученное из принципа максимума Понтрягина,  $u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \left( \sum_{i=1}^N C_i^1 \cos \omega_i t + C_i^2 \sin \omega_i t \right)$  содержит неизвестные постоянные коэффициенты  $C_i^1, C_i^2, i = 1, \dots, N$ . Переключения управления происходят в моменты времени  $t_m, m = 1, \dots, K - 1$ , и  $\tau_n$  — длительность  $n$ -го интервала постоянства управления,  $n = 1, \dots, K$ .

**Теорема 1** (Необходимые условия экстремума). *Всякое решение задачи (1)-(3) в классе кусочно-непрерывных управлений удовлетворяет системе уравнений динамики с учетом структуры закона оп-*

тимального управления и дополнительным  $K - 2N$  уравнениям:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \cos(\omega_1 t_s) & \cos(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_1 t_s) & \sin(\omega_1 t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_1 t_{s+2N-1}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \cos(\omega_N t_s) & \cos(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \cos(\omega_N t_{s+2N-1}) \\ \sin(\omega_N t_s) & \sin(\omega_N t_{s+1}) & \dots & \sin(\omega_N t_{s+2N-1}) \end{vmatrix} = \\ = |\Omega_s, \Omega_{s+1}, \dots, \Omega_{s+2N-1}| = 0, \quad s = 1, \dots, K - 2N.$$

**Лемма 2.** *Справедливость (4) приводит к тому, что ранг всей матрицы  $Z = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{K-1})$  не превосходит  $2N - 1$ , в частности, определители всех возможных квадратных подматриц, составленных из ее столбцов, равны нулю.*

### 3. Заключение

В данной работе была исследована задача быстрогодействия для системы, состоящей из произвольного числа несинхронных осцилляторов с общим скалярным и ограниченным управлением. Утверждение леммы 2 означает, что помимо ранее полученных в [3] условий (4) теоремы 1 других нет. Для случая разгона и остановки условия принципа максимума Понтрягина и указанные условия являются достаточными для решения задачи оптимального управления согласно замечанию 1 и лемме 1.

#### Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
3. Берлин Л.М., Галяев А.А., Лысенко П.В. Необходимые условия экстремума и метод Нейштадта–Итона в задаче оптимального быстрогодействия группой несинхронных осцилляторов // АиТ. 2024. № 6. С. 97–114.

### Sufficient Optimality Condition in Time-Optimal Acceleration–Deceleration Problem for Nonsynchronous Oscillators

*L. M. Berlin*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
berlin.lm@phystech.edu

The time-optimal control problem of acceleration and deceleration of a

system consisting of an arbitrary number of nonsynchronous oscillators with scalar bounded control is considered. In addition to maximum principle conditions, nondegeneracy conditions for optimal control were previously obtained, ensuring solvability for an arbitrarily prescribed number of unknown switching instants. It is proved that the derived relations constitute sufficient optimality conditions in acceleration and deceleration cases.

---

УДК 519.7

**Оптимальный обобщенный  $\mathcal{H}_2$ -наблюдатель линейной дескрипторной системы**

*Р. С. Бирюков, Е. С. Бубнова*

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия  
 ruslan.biryukov@itmm.unn.ru, bubnova@itmm.unn.ru

Рассматривается задача построения оптимального обобщенного  $\mathcal{H}_2$ -наблюдателя для линейной непрерывной дескрипторной системы. Корректность предложенного подхода подтверждается вычислительными экспериментами на примере системы, моделирующей колебания высотного здания при сейсмических воздействиях. В рамках эксперимента обсуждается вопрос о наилучшей оценке максимальных деформаций этой механической системы.

*Ключевые слова:* дескрипторные системы, обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма

Рассмотрим непрерывную линейную дескрипторную систему, динамика которой описывается уравнениями

$$(1) \quad E\dot{x} = Ax + Bw, \quad y = Fx + Dw, \quad z = Cx, \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  — состояние объекта,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  — измеряемый выход,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  — целевой выход,  $w(t) \in L_2([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_w})$  — внешнее возмущение. Будем полагать, что пара матриц  $(E, A)$  является регулярной, т. е. существует такое  $\alpha \in \mathbb{C}$ , что  $\det(\alpha E - A) \neq 0$ . В этом случае система (1) может быть записана в канонической форме Вейерштрасса [2]:

$$E = W \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T, \quad A = W \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T, \quad B = W \begin{bmatrix} \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_2 \end{bmatrix}, \quad C = [\widehat{C}_1 \quad \widehat{C}_2] T,$$

здесь  $J$  и  $N$  — жордановы матрицы, при этом  $N$  — нильпотентная матрица индекса  $\nu$ . Определим левый  $P_l = W \text{diag}(I, 0)W^{-1}$  и правый  $P_r = T^{-1} \text{diag}(I, 0)T$  проекторы на подпространство матричного пучка  $(\lambda E - A)$ , соответствующее конечным собственным значениям. Предположим, что система (1) является безымпulsive относительно целевого выхода, т. е.  $\widehat{C}_2 N^k \widehat{B}_2 = 0$ ,  $k \geq 0$ , а матрица  $F$  удовлетворяет условию  $F = FP_r$ .

Построим наблюдатель полного порядка

$$(2) \quad E\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + L(t)[y - F\widehat{x}], \quad \widehat{z} = C\widehat{x}, \quad \widehat{x}(t_0) = \widehat{x}_0,$$

где  $\widehat{x}$  — оценка состояния  $x$ ,  $\widehat{z}$  — оценка целевого выхода  $z$ , а  $L(t)$  — подлежащая определению матрица параметров наблюдателя, такая что  $L = P_l L$ . Обозначим ошибку оценивания через  $\varepsilon(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$ , тогда вектор-функция  $\varepsilon(t)$  удовлетворяет уравнению:

$$(3) \quad E\dot{\varepsilon} = A_c(t)\varepsilon + B_c(t)w, \quad \zeta = C\varepsilon, \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 = x_0 - \widehat{x}_0,$$

здесь  $A_c(t) = A - L(t)F$  и  $B_c(t) = B - L(t)D$ , кроме этого будем считать, что  $C = \text{column}(C_1, \dots, C_M)$ . Наблюдатель (2) является оптимальным обобщенным  $\mathcal{H}_2$ -наблюдателем, если

$$(4) \quad L(t) = \arg \inf_L \sup \left\{ \max_{m=1, \dots, M} \|C_m \varepsilon\|_\infty : \varepsilon_0^\top R \varepsilon_0 + \|w\|_2^2 \leq 1 \right\},$$

матрица  $R$  задана и удовлетворяет условиям  $R = R^\top \succcurlyeq 0$  и  $R = RP_l$ .

**Теорема 1.** Матрица параметров оптимального обобщенного  $\mathcal{H}_2$ -наблюдателя линейной дескрипторной стационарной системы (1) может быть вычислена как  $Y(t)L(t) = -Z(t)$ ,  $L(t) = P_l L(t)$ , где  $Y = Y^\top \succcurlyeq 0$  и  $Z$  находятся из решения задачи  $\inf \sigma^2$  при ограничениях:

$$\begin{bmatrix} E^\top \dot{Y} E + E^\top Y A + A^\top Y E + E^\top Z F + F^\top Z^\top E & E^\top Y B + E^\top Z D \\ D^\top Z^\top E + B^\top Y E & -I \end{bmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y(t) & C_m^\top \\ C_m & \sigma^2 I \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad Y(t) = Y(t)P_l, \quad Y(t_0) = R,$$

$$t \in [t_0, t_f], \quad Z(t) = P_l^\top Z(t),$$

В качестве примера рассмотрим модель колебаний здания при сейсмическом воздействии на фундамент [1, 2]. Этажи здания представляются материальными точками, последовательно связанными между

собой и с фундаментом линейными вязкоупругими элементами, описываемыми обобщенной моделью Максвелла. В безразмерных переменных модель описывается системой

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 + \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + C^\top C x_1 - \gamma H^\top (x_2 - H x_1) &= G v, \\ \gamma(x_2 - H x_1) &= \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad y = C_m x_1 + \omega, \end{aligned}$$

здесь  $x_1$  — вектор смещений, измеренных относительно фундамента,  $x_2$  — вектор смещений связи между упругим и диссипативным элементами в модели Максвелла,  $v$  — с точностью до знака ускорение фундамента,  $y$  — измеряемый скалярный выход, определяющий деформацию межсекционного соединения двух соседних этажей здания,  $\omega$  — ошибка измерения деформации,  $\beta$  и  $\gamma$  — параметры модели, а матрицы имеют вид  $H^\top = (0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ ,  $C_m = e_m^\top - e_{m-1}^\top$  и  $G^\top = (1, 1, \dots, 1)$ , вектор  $e_k$  —  $k$ -й базисный орт. Требуется разместить измерительное устройство так, чтобы максимальное значение из всех оценок для деформаций межсекционных соединений соседних этажей было наименьшим. На рисунке 1 представлены результаты эксперимента для пяти

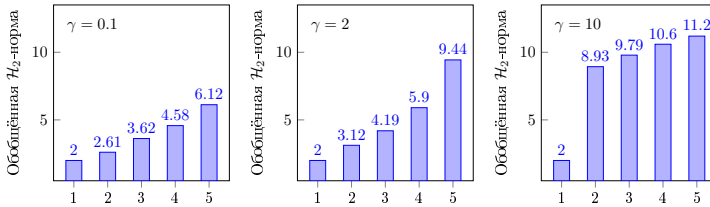


Рис. 1: Зависимость обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы от расположения датчика на этажах при различных значениях параметра  $\gamma$

этажного здания при  $t_0 = 0$ ,  $t_f = 20$ ,  $R = W^{-\top} \text{diag}(I, 0) W^{-1}$ ,  $\beta = 1.2$ . Как видно, наилучшее расположение измерительного устройства будет между первым этажом и фундаментом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2026-0007) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

### Список литературы

1. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. К вопросу о наилучшем расположении измерительного устройства в задаче оценивания состояния динамической системы // В сборнике: XIV Всероссийское совещание по проблемам управления. Сб. научн. тр. Москва, 2024. С. 609–613.

2. *Biryukov R., Bubnova E.* Generalized  $\mathcal{H}_2$  Control of Linear Descriptor Systems // Math. Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2025. Communications in Computer and Information Science, V. 2815. P. 156–168

## Optimal Generalized $\mathcal{H}_2$ Observer for Linear Descriptor Systems

*R. S. Biryukov, E. S. Bubnova*

Lobachevsky University, Nizhny Novgorod, Russia  
ruslan.biryukov@itmm.unn.ru, bubnova@itmm.unn.ru

This paper presents an optimal generalized  $\mathcal{H}_2$  observer design for linear descriptor systems. The approach is validated via a seismic vibration model of a high-rise building, focusing on the optimal estimation of its maximum mechanical deformations.

---

УДК 517.977

### Синтез робастного управления при структурированной неопределенности по априорным и экспериментальным данным

*Р. С. Бирюков<sup>1</sup>, М. М. Коган<sup>2</sup>*

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия<sup>1</sup>

НГУ «Сириус», Сочи, Россия<sup>2</sup>

ruslan.biryukov@itmm.unn.ru, mkogan@nngasu.ru

Рассматривается подход к построению робастных законов управления непрерывной динамической системой со структурированной неопределенностью. В его основе лежит использование априорных и экспериментальных данных и обобщение леммы Питерсена.

*Ключевые слова:* структурированная неопределенность, робастное управление, априорные и экспериментальные данные

В последнее время активно развиваются методы синтеза управления для неопределенных систем, основанные на использовании не только априорной информации, но и данных, полученных в предварительных экспериментах (см. библиографию, например, в [1]). Эти методы в основном касаются анализа дискретных моделей и синтеза цифрового управления. Однако представляет интерес анализ и синтез обратных

связей на основе данных непосредственно для моделей, описываемых дифференциальными уравнениями. В докладе показано как априорные и экспериментальные данные могут быть использованы для квадратичной стабилизируемости неопределенной системы, вычисления ее  $\mathcal{H}_2$ -,  $\mathcal{H}_\infty$ -нормы и других характеристик, а также для синтеза соответствующих робастных законов управления.

Рассмотрим неопределенную систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_\Omega x + B_\Omega u + B_v v, & A_\Omega &= A + F\Omega M_A, & B_\Omega &= B + F\Omega M_B, \\ z &= Cx + Du, \end{aligned}$$

где  $x(\tau) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — состояние,  $u(\tau) \in \mathbb{R}^{n_u}$  — управление,  $v(\tau) \in \mathbb{R}^{n_v}$  — внешнее возмущение,  $A, B, B_v, C, D, F, M_A$  и  $M_B$  — заданные матрицы, а  $\Omega \in \mathbb{R}^{m_\Omega \times n_\Omega}$  — матрица неопределенных параметров. Опишем подход к построению обратной обратной связи  $u = \Theta x$ , которая обеспечивает квадратичную устойчивость замкнутой системы (1) при всех  $\Omega$ , согласованных с априорными и экспериментальными данными.

Пусть априорная информация о неизвестной матрице  $\Omega$  имеет вид  $\Omega \Omega^\top \preccurlyeq \rho^2 I$ , где  $\rho > 0$  — заданный радиус неопределенности. Положим

$$\Delta_0 := \{ \Omega : (I \Omega) \Psi_0 (I \Omega)^\top \preccurlyeq 0 \}, \quad \Psi_0 = \text{diag} \left( -\rho^2 I, I \right).$$

Экспериментальные данные состоят из векторов  $x_t = x(ht)$  и управлений  $u_t = u(ht)$ , полученных в моменты времени  $\tau = ht$ ,  $t = 0, \dots, N$ , при измерениях в системе (1) с неизвестным возмущением  $|v(\tau)| \leq d$ . Обозначим  $\dot{x}_t = \dot{x}(ht)$  вектор производных. Предположим, что матрица  $F$  имеет полный столбцовый ранг, тогда

$$y_t = \Omega \varphi_t + \widehat{B}_v v_t, \quad y_t = (F^\top F)^{-1} F^\top (\dot{x}_t - A x_t - B u_t), \quad \varphi_t = M_A x_t + M_B u_t,$$

где  $\widehat{B}_v = (F^\top F)^{-1} F^\top B_v$ ,  $v_t = v(ht)$ . В силу  $|v_t| \leq d$  множество  $\Delta_t$  матриц  $\Omega$ , согласованных с измерениями в момент времени  $t$ , определяются из условия  $(y_t - \Omega \varphi_t)(y_t - \Omega \varphi_t)^\top \preccurlyeq d^2 B_v B_v^\top$ . Обозначим

$$\Delta_{t+1} := \{ \Omega : (I \Omega) \Psi_{t+1} (I \Omega)^\top \preccurlyeq 0 \}, \quad \Psi_{t+1} = \begin{pmatrix} y_t y_t^\top - d^2 \widehat{B}_v \widehat{B}_v^\top & \star \\ -\varphi_t y_t^\top & \varphi_t \varphi_t^\top \end{pmatrix}.$$

Таким образом, множество матриц, согласованных с априорными и экспериментальными данными, представимо как  $\Delta = \bigcap_{t=0}^N \Delta_t$ .

Задача квадратичной стабилизируемости состоит в определении условий существования матрицы обратной связи  $\Theta$ , при которой неравенство  $(A_\Omega + B_\Omega \Theta)P + P(A_\Omega + B_\Omega \Theta)^\top \prec 0$  выполняется для некоторой

$P \succ 0$  при всех матрицах  $\Omega \in \widehat{\Delta}$ , где  $\widehat{\Delta}$  — внешняя аппроксимация множества  $\Delta$ , задаваемая неравенством  $(I \Omega)\Psi(I \Omega)^\top \preccurlyeq 0$  с  $\Psi = \sum_{t=0}^N \mu_t \Psi_t$  при некоторых  $\mu_t \geq 0$ , и найти эту матрицу.

Для решения этой задачи применяется следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть заданы матрицы  $S = S^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times m_\Omega}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times n_\Omega}$ , множество  $\Delta_\Omega = \left\{ \Omega \in \mathbb{R}^{m_\Omega \times n_\Omega} : (I \Omega)\Phi(I \Omega)^\top \preccurlyeq 0 \right\} \neq \emptyset$ , где  $\Phi = \Phi^\top = (\Phi_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $\Phi_{22} \succ 0$ . Утверждение

$$(2) \quad S + L\Omega R^\top + R\Omega^\top L^\top \prec 0 \quad \forall \Omega \in \Delta_\Omega$$

верно тогда и только тогда, когда линейное матричное неравенство

$$(3) \quad \begin{pmatrix} S - \mu L\Phi_{11}L^\top & R - \mu L\Phi_{12} \\ R^\top - \mu \Phi_{12}^\top L^\top & -\mu \Phi_{22} \end{pmatrix} \prec 0$$

разрешимо при некотором  $\mu > 0$ .

Лемма 1 обобщает лемму Питерсена при  $\Phi = \text{diag}(-I, I)$  и ее расширение в [3] при  $\Phi = \text{diag}(-\widehat{F}, I)$ , где  $\widehat{F} \succcurlyeq 0$ .

**Теорема 1.** Если неизвестная матрица параметров  $\Omega_{tr}$  системы (1) принадлежит множеству  $\hat{\Delta}$ , полученному по априорным и экспериментальным данным, то эта система квадратично стабилизируема при всех  $\Omega \in \hat{\Delta}$  тогда и только тогда, когда линейное матричное неравенство

$$(4) \quad \begin{pmatrix} AP + BZ + PA^T + Z^T B^T - F\Psi_{11}F^T & \star \\ M_A P + M_B Z - \Psi_{12}^T F^T & -\Psi_{22} \end{pmatrix} \prec 0$$

разрешимо относительно переменных  $P = P^T \succ 0$ ,  $Z$  и  $\mu_t \geq 0$ ,  $t = 0, \dots, N$ . В этом случае обратная связь  $\Theta = ZP^{-1}$  обеспечивает квадратичную устойчивость замкнутой системы.

Для построения матрицы обратной связи робастного регулятора вектор  $\dot{x}_t$ , входящий в выражение для  $y_t$ , заменяется его конечно-разностными приближениями вида  $\dot{x}_t \approx (x_{t+1} - x_t)/h$  или  $\dot{x}_t \approx (x_{t+1} - x_t)/h - (1/2)\ddot{x}(ht)h$ , где вторая производная оценивается по априорным данным. Результаты численного моделирования показывают эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 24-11-20023), <https://rscf.ru/project/24-11-20023/>.

### Список литературы

1. Бирюков Р.С., Коган М.М. Синтез робастных законов управления по зашумленным текущим данным // *АиТ*. 2025. № 9. С. 46–63.
2. Petersen I. R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // *Systems and Control Letters*. 1987. V. 8. No. 4. P. 351–357.
3. Bisoffi A., De Persis C., Tesi P. Data-driven Control via Petersen’s Lemma // *Automatica*. 2022. V. 145. Article 110537.

## Data-Driven Robust Control Design under Structured Uncertainty

R. S. Biryukov<sup>1</sup>, M. M. Kogan<sup>2</sup>

Lobachevsky University, Nizhny Novgorod, Russia<sup>1</sup>

Sirius University, Sochi, Russia<sup>2</sup>

ruslan.biryukov@itmm.unn.ru, mkogan@nngasu.ru

We consider an approach to the robust control design for continuous-time dynamical systems with structured uncertainty. It is based on the use of a priori and experimental data and a generalization of Petersen’s lemma.

## Оптимизация параметров противоударного изолятора для защиты объектов на подвижном основании от внешних воздействий прямоугольной формы

*Н. Н. Болотник, В. А. Корнеев*

ИПМех РАН, Москва, Россия  
bolotnik@ipmnet.ru, korneev@ipmnet.ru

Оптимизируются параметры изолятора, защищающего объект на подвижном основании от ударов, при которых ускорение основания как функция времени имеет прямоугольный профиль с заданным интегралом. Изолятор состоит из линейной пружины и демпфера с квадратичной характеристикой. Минимизируется максимум модуля относительного смещения объекта при ограниченном модуле приложенной к нему силы.

*Ключевые слова:* противоударная изоляция, оптимизация

### 1. Уравнение движения и постановка задачи

Движение защищаемого объекта относительно основания описывается уравнением с начальными условиями:

$$(1) \quad m\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + mw(t), \quad f = -k|\dot{x}|\dot{x} - cx, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Здесь  $x$  — смещение объекта относительно основания,  $m$  — масса объекта,  $k$  и  $c$  — коэффициенты демпфирования и жесткости изолятора,  $-w(t)$  — абсолютное ускорение основания,  $f$  — сила, приложенная изолятором к объекту. Качество противоударной изоляции характеризуется двумя критериями: максимумом модуля смещения объекта относительно основания ( $J_1$ ) и максимумом модуля силы, действующей на объект ( $J_2$ ):

$$(2) \quad J_1(k, c) = \max_{w \in W} \max_{t \in [0, \infty)} |x(t)|, \quad J_2(k, c) = \max_{w \in W} \max_{t \in [0, \infty)} |f(t)|,$$

где  $W$  — класс возможных внешних воздействий (возмущений), приложенных к основанию. В данной работе класс  $W$  состоит из функций «прямоугольного профиля» с заданным интегралом:

$$(3) \quad W = \left\{ w(t) : w = b, t \in \left[ 0, \frac{w_0}{b} \right]; w(t) = 0, t > \frac{w_0}{b}; b > 0, w_0 > 0 \right\}.$$

Параметр  $w_0$  здесь фиксирован, а  $b$  может изменяться.

**Задача.** Найти параметры  $k = k_0$  и  $c = c_0$ , минимизирующие критерий  $J_1$  при ограничении, наложенном на критерий  $J_2$ :

$$J_1(k, c) \rightarrow \min_{k, c}, \quad J_2(k, c) \leq U,$$

где  $U$  — заданная положительная величина.

## 2. Задачи о наихудших возмущениях

Эти задачи состоят в максимизации по  $w \in W$  правых частей выражений (2). После максимизации имеем

$$J_1(k, c) = w_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \Psi_1 \left( \frac{w_0}{\sqrt{mc}} k \right), \quad J_2(k, c) = w_0 \sqrt{mc} \Psi_2 \left( \frac{w_0}{\sqrt{mc}} k \right).$$

Функции  $\Psi_1(\xi)$  и  $\Psi_2(\xi)$  от безразмерного аргумента  $\xi = w_0 k / \sqrt{mc}$  получаются в результате численного решения задач о наихудших возмущениях в безразмерных переменных, при переходе к которым параметры  $m$ ,  $c$  и  $w_0$  в соотношениях (1) и (3) становятся равными единице.

## 3. Решение основной задачи параметрической оптимизации

Оптимальные параметры изолятора и соответствующие им значения критериев  $J_1$  и  $J_2$  определяются выражениями

$$(4) \quad \begin{aligned} k_0 &= \frac{\xi_0 U}{w_0^2 \Psi_2(\xi_0)}, \quad c_0 = \frac{U^2}{m w_0^2 \Psi_2^2(\xi_0)}, \\ J_1(k_0, c_0) &= \frac{m w_0^2}{U} \Psi_1(\xi_0) \Psi_2(\xi_0), \quad J_2(k_0, c_0) = U, \\ \xi_0 &= \arg \min_{\xi} (\Psi_1(\xi) \Psi_2(\xi)). \end{aligned}$$

Графики функций, фигурирующих в формулах (4), даны на рис. 1.

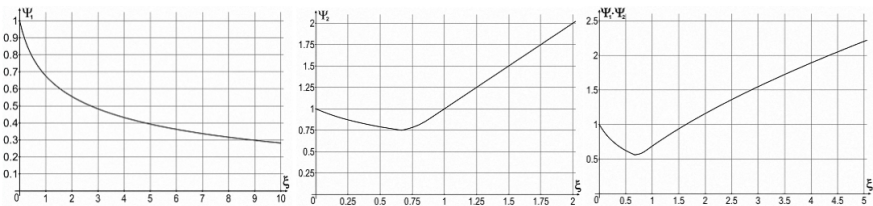


Рис. 1: Графики функций  $\Psi_1(\xi)$ ,  $\Psi_2(\xi)$  и  $\Psi_1(\xi)\Psi_2(\xi)$

Численные расчеты дают

$$\xi_0 \approx 0.667, \Psi_1(\xi_0)\Psi_2(\xi_0) \approx 0.562, \Psi_2(\xi_0) \approx 0.750,$$

$$k_0 \approx 0.890 \frac{U}{w_0^2}, c_0 \approx 1.780 \frac{U^2}{mw_0^2}, J_1(k_0, c_0) \approx 0.562 \frac{mw_0^2}{U}.$$

Известно [1, 2], что для линейного изолятора ( $f = -k\dot{x} - cx$ ) оптимизация, аналогичная проведенной выше для изолятора с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием, дает

$$J_1(k_0, c_0) \approx 0.521 \frac{mw_0^2}{U}, J_2(k_0, c_0) = U,$$

причем наихудшим возмущением из класса (3) как по отношению к относительному смещению объекта, так и по отношению к действующей на него силе является мгновенный удар  $w = w_0\delta(t)$ , где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака. Известно также [1–4], что оптимизация параметров изолятора с квадратичным демпфированием при заданном возмущении  $w = w_0\delta(t)$  дает

$$J_1(k_0, c_0) = 0.5 \frac{mw_0^2}{U}, J_2(k_0, c_0) = U,$$

и это значение отвечает наилучшему качеству защиты от мгновенного удара. Однако в классе возмущений прямоугольного профиля с заданным интегралом  $w_0$  линейный изолятор обеспечивает значение гарантированного минимума модуля относительного смещения объекта, приблизительно на 8% меньшее аналогичной величины для изолятора с квадратичным демпфированием.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

### Список литературы

1. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1978.
2. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey D.V.* Optimal Protection From Impact, Shock, and Vibration. London: CRC Press, 2001.
3. *Afimiwala K.A., Mayne R.W.* Optimal Design of an Impact Absorber // J. Eng. Ind. 1974. V. 96. No. 1. P 124–130.
4. *Lou J., Sun J., Tang S., Li H.* Study on the Optimization of the Shock Isolation System Based on the Limiting Performance Analysis // Int. J. Dynam. Control. 2014. V. 2. P. 415–424.

# Parametric Optimization of a Shock Isolator for Protecting Objects on a Moving Base From Impact Disturbances Modeled by Rectangular Pulses

*N. N. Bolotnik, V. A. Korneev*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
bolotnik@ipmnet.ru, korneev@ipmnet.ru

Parameters of a shock isolator that protects an object on a moving base from impacts under which the acceleration of the base has the form of a rectangular pulse with given integral are optimized. The isolator consists of a linear spring and a damper with quadratic characteristic. The maximum modulus of the displacement of the object relative to the base is minimized, provided that the magnitude of the force applied to the object is constrained.

---

УДК 62-50

## Управление системой трех взаимодействующих тел в среде с квадратичным сопротивлением при ограничении на расстояния между телами

*Н. Н. Болотник, Т. Ю. Фигурина*

ИПМех РАН, Москва, Россия  
bolotnik@ipmnet.ru, t\_figurina@mail.ru

Для системы трех взаимодействующих точечных тел, движущихся в среде с квадратичным сопротивлением, решается задача ее переведения между начальным и конечным состояниями покоя на одной и той же плоскости. Управляющими переменными служат силы взаимодействия между телами. Требуется, чтобы в течение всего движения расстояние между телами было не меньше заданного.

*Ключевые слова:* мобильные системы с управляемой конфигурацией, движение в среде с квадратичным сопротивлением, управление

### 1. Постановка задачи

Рассматривается система трех взаимодействующих точечных тел  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые движутся в среде с квадратичным сопротивле-

нием (рис.1). Обозначим через  $\mathbf{f}_i^j$  силу, приложенную телом  $A_j$  к телу  $A_i$ , действующую вдоль прямой  $A_i A_j$ . Силы  $\mathbf{f}_i^j$  служат управляющими переменными, ограничения на них не налагаются. Предполагается, что в начальный момент времени все тела покоятся и не находятся на одной прямой; в этом случае движение системы будет происходить в плоскости, содержащей начальные положения тел.

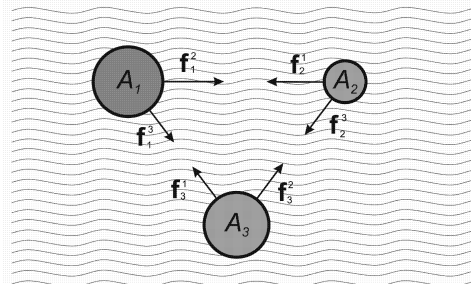


Рис. 1: Система трех взаимодействующих тел

Уравнения движения системы имеют вид

$$(1) \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \quad m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_i^j - c_i |\mathbf{v}_i| \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{f}_i^j = -\mathbf{f}_j^i, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $m_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — масса, радиус-вектор и скорость тела  $A_i$ ,  $c_i$  — коэффициент сопротивления среды движению тела  $A_i$ . В дальнейшем предполагается, что  $m_i^2/c_i \neq m_j^2/c_j$  для любых двух тел  $A_i$  и  $A_j$ .

**Задача.** Построить движение и найти соответствующие ему управляющие силы  $\mathbf{f}_i^j$ , которые переводят систему (1) из начального состояния покоя в конечное состояние покоя при запрете в процессе движения сближения тел на расстояние  $d$ :

$$(2) \quad |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)| \geq d, \quad t \in [0, T], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Время  $T$  окончания процесса не фиксировано.

Данная работа продолжает исследование, опубликованное в [1], где задача о перемещении трех взаимодействующих тел была решена при отсутствии ограничений (2) на взаимное расположение тел, в том числе разрешалось прохождение тел друг сквозь друга.

Назовем  $A_i^0$  и  $A_i^*$  начальные и конечные положения тел  $A_i$ .

## 2. Основные результаты

Решим вначале задачу в частном случае, когда одно из тел покоится, а в движении участвуют два тела, взаимодействующих друг с другом, при отсутствии взаимодействия с покоящимся телом. При этом взаимодействующие тела могут двигаться лишь вдоль прямой, проходящей через их начальные положения.

**Утверждение 1.** Пусть конечные положения тел  $A_i^*$  и  $A_j^*$  принадлежат прямой  $A_i^0 A_j^0$ ,  $|A_i^0 A_j^0| \geq d$ ,  $|A_i^* A_j^*| \geq d$  и векторы  $\overrightarrow{A_i^0 A_j^0}$  и  $\overrightarrow{A_i^* A_j^*}$  сонаправлены. Тогда можно перевести систему между начальным и конечным состояниями покоя за счет взаимодействия тел  $A_i$  и  $A_j$  без взаимодействия с третьим телом так, что в процессе движения расстояние между телами будет не меньше  $d$ .

В некоторые моменты времени импульс системы мгновенно перераспределяется между телами  $A_i$  и  $A_j$ , в остальное время тела движутся свободно.

Рассмотрим теперь случай, когда нужно изменить положения всех трех тел.

**Утверждение 2.** Пусть направление обхода точек  $A_1^0, A_2^0, A_3^0$  (по или против часовой стрелки) совпадает с направлением обхода точек  $A_1^*, A_2^*, A_3^*$ . Тогда решение задачи существует.

Движение, переводящее систему между начальным и конечным положениями состоит из этапов, на каждом из которых одно из тел неподвижно и не взаимодействует с двумя оставшимися, перемещающимися вдоль прямой, согласно Утверждению 1.

**Утверждение 3.** Пусть направления обхода точек  $A_1^0, A_2^0, A_3^0$  и точек  $A_1^*, A_2^*, A_3^*$  противоположны. Если существует решение уравнений

$$(3) \quad \frac{c_1}{m_1} \sin(\alpha + \beta) = \frac{c_2}{m_2} \sin \alpha = \frac{c_3}{m_3} \sin \beta$$

то решение задачи существует.

При попарных движениях тел системы (два движутся, третье покоится) невозможно изменить направление обхода точек  $A_1, A_2, A_3$ , поэтому для такого изменения должны одновременно двигаться все три тела. Рис. 2 иллюстрирует это движение. После приведения точки  $A_3$  в положение  $\hat{A}_3$  нулевой импульс системы перераспределяется между телами и они свободно движутся по прямым, пересекающимся в одной точке. Условие (3) гарантирует тождественное равенство нулю импульса системы, что позволяет мгновенно остановить тела, когда направление обхода точек изменится на противоположное.

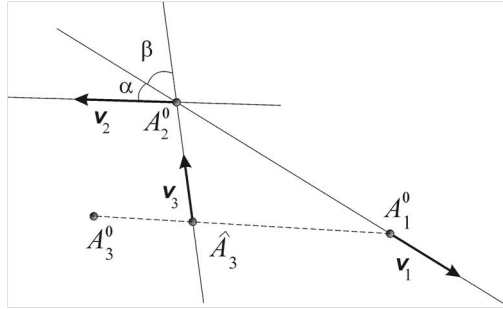


Рис. 2: Изменение направления обхода точек системы

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

### Список литературы

1. Bolotnik N., Figurina T., Mosenkov T. Planar Motion of Three Interacting Bodies in a Medium With Quadratic-Law Friction // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2025. Vol. 105. Issue 7. e70135.

## Control of a System of Three Interacting Bodies in a Medium With Quadratic-Law Resistance Under a Constraint Imposed on the Distance Between the Bodies

*N. N. Bolotnik, T. Yu. Figurina*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
 bolotnik@ipmnet.ru, t\_figurina@mail.ru

For a system of three interacting bodies (point masses) moving in a medium with quadratic-law resistance, the problem of transferring it between an initial and final states of rest on the same plane is solved. The forces of interaction between the bodies are taken as control variables. It is required that the distance between the bodies be no less than a specified value throughout the entire motion.

## Оптимальное управление группами подвижных объектов переменного состава

*А. С. Бортакoвский*

МАИ, Москва, Россия  
 asbortakov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления группами подвижных объектов. Каждая группа составлена из (простых) объектов управления и движется как один (составной) объект. В процессе движения каждая группа может разделяться на подгруппы или, наоборот, соединяться с другими группами. При этом динамические возможности группы меняются, так как зависят от ее состава.

*Ключевые слова:* гибридная система, оптимальное управление, граф переключений

### 1. Введение

Задачи группового управления весьма разнообразны и имеют многочисленные приложения [1]. Представляют интерес задачи управления группами, каждая из которых составлена из так называемых простых объектов управления и движется как один (составной) объект. В процессе движения каждая группа может разделяться на подгруппы или, наоборот, соединяться с другими группами [2]. Динамические характеристики (скорость движения, управляемость, маневренность и т.п.) составного объекта, как правило, отличаются от характеристик простого объекта. Поэтому изменение состава групп, их объединение или разделение, влияет на процесс движения и служит ресурсом управления. Считая каждое изменение состава любой группы переключением, динамическую систему следует отнести к гибридным.

### 2. Постановка задачи

Схема движения гибридной системы задается *графом переключений*  $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$  — ориентированным ациклическим взвешенным графом с множеством вершин  $\mathbf{V} = \{1, \dots, N\}$  и множеством дуг  $\mathbf{E}$ . Каждой вершине графа поставим в соответствие позицию переключения:  $\mathbf{V} \leftrightarrow V = \{v_i = (t_i, x_i) | i = 1, \dots, N\}$ , где  $t_i$  — момент переключения, а  $x_i \in \mathbb{R}^n$  — состояние составного объекта в момент переключения. При этом соответствии дуга  $(i, j) \in \mathbf{E}$  будет означать перемещение составного объекта  $x_{ij}^k$  из позиции  $(t_i, x_i)$  в позицию  $(t_j, x_j)$ . Вес  $k = k(i, j)$  дуги равен количеству простых объектов, входящих в составной объект

$x_{ij}^k$ . Положения переключений могут быть фиксированными, подвижными или свободными в зависимости от схемы движения.

Непрерывное движение составного объекта  $x_{ij}^k$  на промежутке  $[t_i, t_j]$  описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_{ij}(t) = f_{ij}^k(t, x_{ij}(t), u_{ij}(t)),$$

где  $x_{ij}(t)$ ,  $u_{ij}(t)$  — состояние составного объекта и значение управления в момент времени  $t \in [t_i, t_j]$ ,  $x_{ij}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_{ij}(t) \in U_{ij} \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Предполагаем, что в начальный  $t_S$  и конечный  $t_F$  моменты времени все простые объекты находятся в состояниях  $x_S$  и  $x_F$  соответственно. Начальное и конечное состояния каждого составного объекта определяются терминальными условиями

$$(1) \quad x_{ij}^k(t_i) = x_i, \quad x_{ij}^k(t_j) = x_j.$$

В моменты переключений должны выполняться следующие условия:  
– непрерывность траектории каждого простого объекта,  
– баланс количества простых объектов, участвующих в переключении,  
– частичный порядок моментов переключений.

На множестве допустимых процессов определим функционал качества — время  $T = t_F - t_S$  перехода системы из стартовой позиции  $S = (t_S, x_S)$  в финишную позицию  $F = (t_F, x_F)$ . Требуется найти наименьшее время  $T^*$  и оптимальный процесс управления, на котором это время достигается, т.е. решить задачу быстрогодействия  $T \rightarrow \min$ .

### 3. Достаточные условия оптимальности

Для любой дуги  $(i, j) \in \mathbf{E}$  графа переключения определим *двухпозиционную* функцию цены  $\Theta_{ij}(t_i, x_i | t_j, x_j)$  как решение задачи быстрогодействия составного объекта  $x_{ij}^k$  при фиксированных концах (2) траектории. Функция  $(t, x) \rightarrow \Theta_{ij}(t, x | t_j, x_j)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана с нулевым конечным условием:

$$(2) \quad \min_{u \in U_{ij}} \left\{ \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial t} f_{ij}^k(t, x, u) + 1 \right\} = 0, \quad \Theta_{ij}(t_j, x_j | t_j, x_j) = 0.$$

При минимизации левой части уравнения (2) получаем так называемое оптимальное *двухпозиционное* управление

$$(3) \quad \mathbf{u}_{ij}(t, x | t_j, x_j) = \arg \min_{u \in U_{ij}} \left\{ \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial t} f_{ij}^k(t, x, u) + 1 \right\} = 0.$$

Для каждой позиции  $v_i \in V$  определим значение *условной* функции цены  $\vartheta_i(t_i, x_i|V)$  как наименьшее время достижения конечного состояния всеми простыми объектами, находящимися в позиции  $v_i = (t_i, x_i)$ , при фиксированных позициях переключений  $V$ . Иначе говоря, при вычислении  $\vartheta_i$  используется только оптимизация управления непрерывным движением составных объектов между фиксированными позициями переключений. Условные функции цены удовлетворяют рекуррентному уравнению с нулевым конечным условием:

$$(4) \quad \vartheta_i(t_i, x_i|V) = \max_{(i,j) \in \mathbf{E}} \{ \Theta_{ij}(t_i, x_i|t_j, x_j) + \vartheta_j(t_j, x_j|V) \}, \vartheta_F(t, x|V) = 0.$$

Применение условных функций цены позволяет свести задачу оптимального управления к задаче конечномерной минимизации

$$(5) \quad T^* = \min_V \vartheta_S(t_S, x_S|V).$$

Обозначим через  $V^* = \{(t_i^*, x_i^*) | i = 1, \dots, N\}$  множество оптимальных позиций переключений, на которых достигается минимум (5).

**Теорема 1.** *Если существуют функции  $\Theta_{ij}$ ,  $\mathbf{u}_{ij}$ ,  $\vartheta_i$ , удовлетворяющие на области определения уравнениям (2)–(4), то для оптимальности допустимого процесса  $x_{ij}(\cdot)$ ,  $u_{ij}(\cdot)$  с позициями переключений  $V$  достаточно, чтобы выполнялись условия:*

- а)  $u_{ij}(t) = \mathbf{u}_{ij}(t, x_{ij}(t)|t_j, x_j)$  почти всюду на  $[t_i, t_j]$ ,  $(i, j) \in \mathbf{E}$ ;*
- б)  $(t_i, x_i) = (t_i^*, x_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .*

#### Список литературы

1. *Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г.* Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит, 2009.
2. *Бортаковский А.С.* Быстродействие групп подвижных объектов переменного состава // Изв. РАН. ТиСУ. 2025. № 3. С. 46–59.

## Optimal Control of Groups of Moving Objects of Variable Composition

*A. S. Bortakovskii*

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
 asbortakov@mail.ru

We consider the problem of optimal control of groups of moving objects. Each group consists of (simple) control objects and moves as a single (composite) object. As the group moves, it can split into subgroups or,

conversely, merge with other groups. The dynamic capabilities of the group change as they depend on its composition.

---

УДК 681.5.01+531.53

## Гашение колебаний груза, подвешенного на нерастяжимом тросе к подвижному объекту

*В. М. Буданов, А. М. Формальский*

НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
vlbudanov@gmail.com, formal@imec.msu.ru

Задача гашения колебаний возникает, например, при тушении лесного пожара перед тем, как вылить воду из контейнера на очаг пожара. Задача сначала рассматривается теоретически в идеализированной постановке, когда моделью системы является однозвенный математический маятник переменной длины с грузом на конце. В этой постановке аналитически получено релейное управление в виде чередующихся максимальных удлинений и укорочений троса. Исследуется также более реалистичная система, в которой мгновенное изменение длины троса заменяется линейным участком с заданным наклоном.

*Ключевые слова:* гашение колебаний, маятник переменной длины

### 1. Введение

Задачам гашения нежелательных колебаний, возникающих в механических системах, или их предотвращения посвящено довольно много исследований. Среди них отметим работы [1-3], в которых предлагаются и исследуются, как в линейной, так и в нелинейной постановке, а также с применением асимптотических методов различные способы борьбы с такими нежелательными явлениями.

### 2. Модель механической системы

Систему дифференциальных уравнений, описывающих колебания груза на тросе относительно неподвижной точки подвеса  $O$ , запишем в виде:

$$(1) \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{K}{Mt^2}, \quad \frac{dK}{dt} = -Mgl \sin \phi.$$

Первое из уравнений системы следует из определения кинетического момента  $K$  относительно точки подвеса  $O$ , а второе описывает его изменение во времени под влиянием момента силы тяжести груза. Предполагается, что трос невесом и нерастяжим. Из уравнений (1) вытекает одно дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее между собой только переменные  $\phi$  и  $K$ :

$$(2) \quad \frac{dK}{d\phi} = -\frac{M^2 l^3 g \sin \phi}{K}.$$

Длина троса  $l$  выступает в роли управляющего воздействия с ограничениями

$$(3) \quad l_{\min} \leq l(\phi, \dot{\phi}) \leq l_{\max}.$$

### 3. Синтез оптимального управления длиной троса

На рис. 1 схематично изображена траектория на одном полуколебании, происходящем слева направо в верхней полуплоскости переменных  $\phi$  и  $K$ . Минимальное значение угла  $\phi$  в конце полуколебания достигается, если и только если на части  $K > 0$  траектории  $K = K(\phi)$  производная  $dK/d\phi$  принимает минимально возможное значение при каждом значении угла  $\phi$ . Из этого следует, что искомое оптималь-

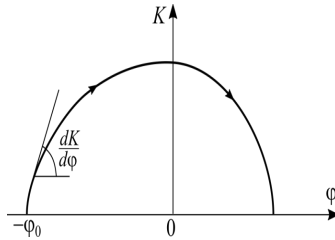


Рис. 1: Траектория уравнения (2) на одном полуколебании

ное управление на каждом полуколебании определяется при помощи следующего соотношения:

$$(4) \quad l_{\text{opt}}(\phi, K) = \arg \min_{l \in L} \left[ \frac{dK}{d\phi} \right]_{K>0} = \begin{cases} l_{\min} & \text{при } \phi \dot{\phi} < 0 \\ l_{\max} & \text{при } \phi \dot{\phi} > 0 \end{cases}.$$

Выражение (4) описывает оптимальное управление, минимизирующее абсолютную величину угла отклонения троса от вертикали в момент,

когда величина  $K$  обращается в ноль. На каждом полупериоде колебаний происходят два переключения оптимального управления (4).

#### 4. Управление с ограничением по скорости

Заменяем построенное релейное управление длиной троса (4) на вариант, когда мгновенное изменение длины троса заменяется линейным с задаваемым коэффициентом наклона  $V_0$ . Тогда движение будет описываться следующей системой

$$(5) \quad \dot{l} = \begin{cases} -V_0 & \text{при } \dot{\phi} < 0 \text{ и } l > l_{\min}, \\ V_0 & \text{при } \dot{\phi} > 0 \text{ и } l < l_{\max}, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$l\ddot{\phi} + 2\dot{l}\dot{\phi} + g \sin \phi = 0$$

Результаты моделирования двух вариантов управления (4) и (5) показали, что введение ограничения на скорость изменения длины не сильно влияет на скорость затухания колебаний, если время изменения длины невелико по сравнению с длительностью знакопостоянства управления, в частности, если это соотношение равно одной четверти.

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова

#### Список литературы

1. Черноуцко Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
2. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Shock, Impact, and Vibration. Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
3. Formalskii A., Gannel L. Control to Avoid Vibrations in Systems with Compliant Elements // J. Vibrations and Control. 2015. V. 21. No. 14. P. 2852–2865.

#### Damping the Oscillations of a Load Suspended on an Inextensible Cable to a Moving Object

V. M. Budanov, A. M. Formalskii

Institute of Mechanics of the Moscow Lomonosov State University, Moscow, Russia

vlbudanov@gmail.com, formal@imec.msu.ru

The problem of damping oscillations arises, for example, when extinguishing a forest fire before pouring water from a container onto the

fire. This problem is first considered theoretically in an idealized setting, where the system is modeled as a single-link mathematical pendulum of variable length with a load at its end. In this problem setting, the control is found analytically in the form of alternating maximum elongations and shortenings of the cable.

---

УДК 517.925.51

## Положения равновесия и бифуркации в трехмерной модели динамики популяций

*В. В. Бурдилова<sup>1</sup>, А. П. Крищенко<sup>2</sup>*

ИПУ РАН, Москва, Россия<sup>1</sup>

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия<sup>2</sup>

burvv@ipu.ru, apkri@bmstu.ru

Для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений доказаны условия существования и устойчивости положений равновесия, вымирания и сосуществования популяций. Предложены таблицы для интерпретации полученных результатов и бифуркаций.

### 1. Введение

Исследуется система дифференциальных уравнений [1]  $\dot{x}_1 = \lambda - \beta x_1 x_2 - p_1 x_1 x_3 - \mu_1 x_1$ ,  $\dot{x}_2 = \beta x_1 x_2 - p_2 x_2 x_3 - \mu_2 x_2$ ,  $\dot{x}_3 = qp_1 x_1 x_3 + qp_2 x_2 x_3 - \mu_3 x_3$ , где переменные  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{+,0}^3$  — плотности популяций восприимчивых, инфицированных жертв и хищников. В работе найдены все положения равновесия (ПР) и условия их устойчивости, которые представлены в трех таблицах, удобных для бифуркационного анализа пространства параметров. Кроме этого, доказано существование аттрактора и найдены условия вымирания популяций.

### 2. Основные результаты

С помощью обозначений  $A = \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta}$ ,  $B = \frac{\mu_2 \mu_3}{qp_1}$ ,  $C = \frac{\mu_2 \mu_3}{p_2 q} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\beta} - \frac{\mu_2 p_1}{p_2 \beta}$ ,  $D = \frac{\beta \mu_3^2}{p_1 p_2 q^2} - \frac{\mu_2 \mu_3}{qp_2} + \frac{\mu_1 \mu_3}{qp_1}$ ,  $x_1^* = \frac{\lambda qp_2}{\beta \mu_3 + qp_2 \mu_1 - \mu_2 qp_1}$ ,  $\lambda_B = B \frac{p_1 \mu_*}{p_1 \mu_* + p_2 \mu_1}$  доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Существует не более четырех ПР  $E_i$ .*

1.  $E_1(\frac{\lambda}{\mu_1}, 0, 0)$  всегда существует, асимптотически устойчиво при

$\lambda < \min(A, B)$ , устойчиво в целом при  $\lambda < \min(A, \lambda_B)$ .

2.  $E_2(\frac{\mu_3}{qp_1}, 0, \frac{\lambda q - \mu_1}{\mu_3 p_1})$  существует при  $\lambda > B$  и асимптотически устойчиво при  $\lambda > D$ ;

3.  $E_3(\frac{\mu_2}{\beta}, \frac{\lambda}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\beta}, 0)$  существует при  $\lambda > A$  и асимптотически устойчиво при  $\lambda < C$ ;

4.  $E_4(x_1^*, \frac{\mu_3 - qp_1 x_1^*}{qp_2}, \frac{\beta x_1^* - \mu_2}{p_2})$  существует при  $C < \lambda < D$  и устойчиво в целом в  $D^* = \mathbb{R}_{+,0}^3 \setminus \{\{x_2 = 0\} \cup \{x_3 = 0\}\}$ .

Условия асимптотической устойчивости получены с помощью линейного приближения, условия устойчивости в целом ПР  $E_1$  найдены с помощью метода локализации инвариантных компактов [2, 3]. Для доказательства устойчивости в целом внутреннего положения равновесия  $E_4(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  использовалась функция Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2}C_1(x_1 - x_1^*)^2 + C_2(x_2 - x_2^* - x_2^* \ln \frac{x_2}{x_2^*}) + C_3(x_3 - x_3^* - x_3^* \ln \frac{x_3}{x_3^*}),$$

для которой  $V(x^*) = 0$ ,  $V(x) > 0$  при  $x \neq x^*$ . При выбранных  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = x_1^*$ ,  $C_3 = x_1^*/q$  производная функции Ляпунова неположительна,

$$\dot{V} = -(x_2 - x_2^*)^2(\beta x_2 + p_1 x_3 + \mu_1) \leq 0,$$

но доказано, что  $E_4$  устойчиво в целом в  $D^*$ .

Пространство параметров  $\mathbb{R}_+^8$  разбито на 3 области, соответствующие 1)  $A < B < C < D$ ; 2)  $A < C < B < D$ ; 3)  $D < B < C < A$ , или  $D < C < B < A$ , или  $C < D < B < A$  и предложены 3 таблицы.

Таблица 1 ( $A < B < C < D$ )

$\lambda$	$E_1(*, 0, 0)$	$E_2(*, 0, *)$	$E_3(*, *, 0)$	$E_4(*, *, *)$
$(0, A)$	Гл. уст., $\lambda_B$	∄	∄	∄
$(A, B)$	Неуст.		Неуст.	
$(B, C)$		Неуст.		Гл. уст. в $D^*$
$(C, D)$			Ас. уст.	
$(D, \infty)$				

Таблица 2 ( $A < C < B < D$ )

$\lambda$	$E_1(*, 0, 0)$	$E_2(*, 0, *)$	$E_3(*, *, 0)$	$E_4(*, *, *)$
$(0, A)$	Гл. уст., $\lambda_B$	∄	∄	∄
$(A, C)$	Неуст.		Неуст.	
$(C, B)$		Неуст.		Гл. уст. в $D^*$
$(B, D)$			Ас. уст.	
$(D, \infty)$				

Таблица 3 ( $D < B < C < A$  или  $D < C < B < A$  или  $C < D < B < A$ )

$\lambda$	$E_1(*, 0, 0)$	$E_2(*, 0, *)$	$E_3(*, *, 0)$	$E_4(*, *, *)$
$(0, B)$	Гл. уст., $\lambda_B$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$(B, A)$	Неуст.	Ас. уст.		
$(A, \infty)$			Неуст.	

В пространстве параметров  $\mathbb{R}_+^9$  над каждой из областей добавлены поверхности ( $\lambda = A$ ,  $\lambda = B$ ,  $\lambda = C$ ,  $\lambda = D$ ) в соответствии с первым столбцом каждой из таблиц. При анализе условий возникновения бифуркаций (бифуркации Хопфа и др.) при изменении параметров системы использовалось построенное разбиение пространства параметров.

**Теорема 2.** *В положительно инвариантном компактном множестве [4]  $K = \Omega_1 \cap \Omega_1$  система имеет аттрактор, где*

$$\Omega_1(\varphi_1, \mathbb{R}_{+,0}^3) = \{0 \leq x_1 \leq \lambda/\mu_1\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3,$$

$$\Omega_2(\varphi_2, \mathbb{R}_{+,0}^3) \subset \{\lambda q/\mu^* \leq qx_1 + qx_2 + x_3 \leq \lambda q/\mu_*\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3,$$

$$\mu_* = \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \mu^* = \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3).$$

**Теорема 3.** *Популяция  $x_2$  вымирает при  $\lambda < A$ , а популяция  $x_3$  — при  $\lambda < \lambda_B$ . Популяции  $x_1, x_2, x_3$  сосуществуют при  $C < \lambda < D$ .*

### 3. Заключение

В данной работе предложены таблицы, соответствующие условиям существования и устойчивости положений равновесия в зависимости от значений параметров системы, которые оказались удобными для интерпретации этих условий и анализа бифуркаций.

### Список литературы

1. Bezabih A.F., Edessa G.K., Koya P.R. Mathematical Eco-Epidemiological Model on Prey-Predator System // Math. Modell. Appl. 2020, V. 5, No. 3, P. 183–190.
2. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. С. 1669–1676.
3. Крищенко А.П. Итерационные последовательности метода локализации // Дифференциальные уравнения. 2024. №11. Т. 60. С. 1460–1470.
4. Халил Х.К. Нелинейные системы. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.

## Equilibrium Points and Bifurcations in a Three-Dimensional Model of Population Dynamics

V. V. Burdilova<sup>1</sup>, A. P. Krishchenko<sup>2</sup>

ICS RAS, Moscow, Russia<sup>1</sup>

BMSTU, Moscow, Russia<sup>2</sup>

burvv@ipu.ru, apkri@bmstu.ru

For the considered system of differential equations, the conditions of existence and stability of equilibrium points, extinction and coexistence of populations are proved. Tables for interpretation of the obtained results and bifurcations are proposed.

---

УДК 531.36

### О движении бусинки на качелях при наличии сухого трения

A. A. Буров<sup>1</sup>, В. И. Никонов<sup>1</sup>, Е. С. Шалимова<sup>2</sup>

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия<sup>1</sup>

НИИ Механики, МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия<sup>2</sup>  
jtm@narod.ru, nikon\_v@list.ru, ekateryna-shalimova@yandex.ru

Изучается задача описания движения материальной точки по шероховатой кривой, фиксированной на бифилярных качелях: определяются условия, при которых точка остается в состоянии покоя относительно сидения, численно изучаются движения точки вплоть до останова в случае, когда точка покидает положение относительного равновесия под действием приложенных сил.

*Ключевые слова:* качели, сухое трение, относительные равновесия, плоские колебания

Рассмотрено движение механической системы: качелей  $\mathcal{S}$ , состоящих из тяжелого твердого тела (сидения)  $\mathcal{G}$  и пары одинаковых невесомых стержней, обеспечивающих бифилярный подвес, а также из тяжелой бусинки, совершающей движения вдоль шероховатой тонкой криволинейной проволоочки, фиксированной в сидении. Предполагается, что движение осуществляется в вертикальной плоскости.

Исследованы условия существования относительных равновесий, когда бусинка остается в покое относительно сидения. Выделены уста-

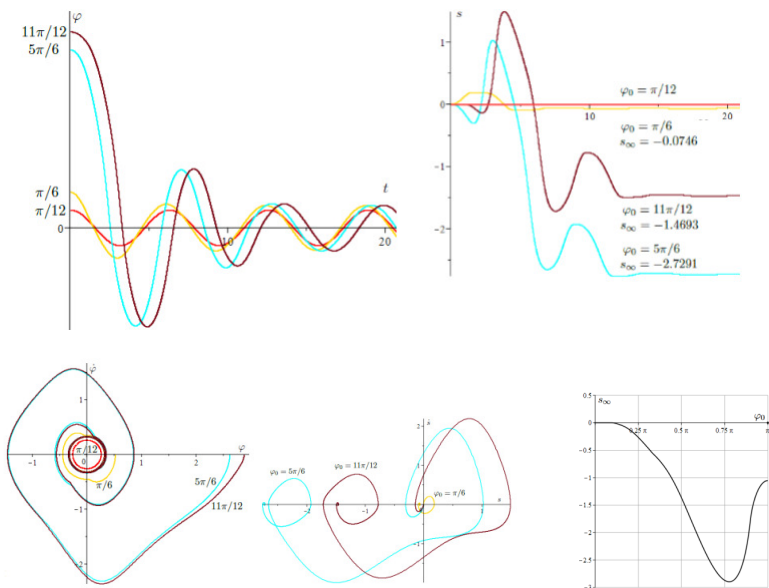


Рис. 1: Примеры проекций фазовых кривых на некоторые плоскости и график зависимости финального сдвига от начального угла.

новившиеся движения, существующие на бесконечном, полубесконечном и конечном промежутках времени.

Выписаны уравнения движения системы, описывающие совместную динамику качелей и бусинки. Численно исследованы некоторые классы движений, на которых бусинка начинает движение из состояния покоя относительно сидения и приходит в состояние равновесия относительно сидения. Исследован финальный сдвиг бусинки относительно начального положения.

В предположении о том, что отклонение качелей от нисходящей вертикали определяется углом  $\varphi$ , а положение бусинки определяется натуральным параметром  $s$ , измеряемым вдоль кривой, для некоторых начальных условий найдены фазовые кривые. Проекция фазовых кривых на разные плоскости, а также зависимость финального сдвига от начальных условий изображены на Рис. 1.

Следует заметить, что интерес авторов к бифилярному подвесу инспирирован публикациями [1–3]. В этих работах предполагается, что

бусина совершает предписанное движение относительно сиденья (в нашей терминологии). Исследования, выполненные в этих работах, были дополнены в [4] аналитическим изучением расщепления сепаратрис и численным изучением сечений Пуанкаре.

Исследование первого и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке РФФ (Проект № 24-21-20143), <https://rscf.ru/project/24-21-20143/>.

### Список литературы

1. *Акуленко Л.Д.* Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 82–91.
2. *Акуленко Л.Д.* Оптимальное управление движениями бифилярного маятника // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 793–806.
3. *Маркеев А.П.* К задаче о точности хода маятниковых часов на вибрирующем основании // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 5. С. 112–123.
4. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Swings Actuated by the Relative Motion of the Bead: Regular and Chaotic Dynamics // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. V. 46. No. 6. P. 2761–2767.

## On the Motion of a Bead on a Swing in the Presence of Dry Friction

*A. A. Burov<sup>1</sup>, V. I. Nikonov<sup>1</sup>, E. S. Shalimova<sup>2</sup>*

FRC CSC RAS, Moscow, Russia<sup>1</sup>

Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia<sup>2</sup>  
jtm@narod.ru, nikon\_v@list.ru, ekateryna-shalimova@yandex.ru

The problem of describing the motion of a bead along a rough curve fixed in a bifilar swing is studied. The conditions under which the bead remains at rest relative to the seat are determined. Motions of the bead when the bead leaves the position of relative equilibrium under the action of applied forces up to a stop are studied numerically.

---

## Эффект трансгрессии в неголономных системах малой размерности

*Н. М. Видов, А. С. Кулешов*

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
nikitavidov98@gmail.com, alexander.kuleshov@math.msu.ru

В 1986 году Я.В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем. Рассматриваются механические системы с неголономными связями, содержащими малый параметр. Предполагается, во-первых, что при нулевом значении параметра связи такой системы интегрируемы, то есть получается семейство голономных систем, зависящее от нескольких произвольных констант интегрирования. Во-вторых, эти голономные системы должны быть вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. При ненулевом значении малого параметра поведение таких систем можно рассматривать при помощи асимптотических методов, представляя его как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых постоянных. В докладе описан эффект трансгрессии в нескольких задачах механики неголономных систем с двумя степенями свободы.

*Ключевые слова:* слабо неголономные системы, эффект трансгрессии

### 1. Введение

Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется  $n + m$  обобщенными координатами  $x_1, \dots, x_{n+m}$ . Пусть на движение данной механической системы наложены  $m$  неголономных связей вида

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n+m} a_{si}(x_1, \dots, x_{n+m}, \varepsilon) \dot{x}_i = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad \text{rank}(a_{si}) = n,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Предположим, что при  $\varepsilon = 0$  эти уравнения интегрируются:

$$\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{n+m} k_{rs}(x_1, \dots, x_{n+m}) a_{si}(x_1, \dots, x_{n+m}, 0) \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \varphi_r(x_1, \dots, x_{n+m}),$$

$$\det \|k_{rs}\| \neq 0, \quad r = 1, \dots, m.$$

Тогда при  $\varepsilon \neq 0$  связи будем называть «слабо неголономными».

Введем новые обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_{n+m}$  такие, что  $q_i = x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  и

$$q_{n+\mu} = \varphi_\mu(x_1, \dots, x_{n+m}), \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Тогда в координатах  $q_1, \dots, q_{n+m}$  уравнения связей (1) имеют вид:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{q}_{n+\mu} &= 0, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \text{при } \varepsilon = 0; \\ \dot{q}_{n+\mu} &= \varepsilon \sum_{\lambda=1}^n c_{s\lambda}(q_1, \dots, q_{n+m}, \varepsilon) \dot{q}_\lambda, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \text{при } \varepsilon \neq 0. \end{aligned}$$

Будем считать, что задана также функция Лагранжа

$$L = L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n+m}, q_1, \dots, q_{n+m}, \varepsilon).$$

В этом случае при  $\varepsilon = 0$  получаем семейство гамильтоновых систем с параметрами  $R_\mu \equiv q_{n+\mu}$ , возникающими после интегрирования связей (2). Функция Гамильтона  $H_0(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, R_1, \dots, R_m)$  стандартным образом получается из функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_0(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, q_1, \dots, q_n, R_1, \dots, R_m) &= \\ &= L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, 0, \dots, 0, q_1, \dots, q_n, R_1, \dots, R_m, 0) \end{aligned}$$

При  $\varepsilon \neq 0$  величины  $R_1, \dots, R_m$  могут начать эволюционировать. Этот эффект назван в работах Я.В. Татарина трансгрессией [1]. В данной работе на основании результатов Я.В. Татарина описан эффект трансгрессии в нескольких задачах механики неголономных систем с двумя степенями свободы.

## 2. Движение точки с неголономной связью

Пусть точка массы  $m$  движется в трехмерном пространстве под действием сил с потенциалом

$$V = \frac{c}{2} (x^2 + y^2)$$

и при наличии неголономной связи

$$(3) \quad \dot{z} = \varepsilon(\dot{x}y - \dot{y}x).$$

Тогда при  $\varepsilon = 0$  уравнения движения точки записываются следующим образом:

$$(4) \quad \dot{z} = 0, \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Общее решение системы (4) имеет вид

$$z = C_0, \quad x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad y = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t.$$

При  $\varepsilon \neq 0$  уравнения движения точки записываются следующим образом:

$$\dot{z} = \varepsilon(\dot{x}y - y\dot{x}), \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Их общее решение представляется в виде:

$$z = \varepsilon\omega (C_2 C_3 - C_1 C_4) t + C_0, \\ x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad y = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t.$$

В данном случае мы имеем дело с трансгрессией первого порядка: за время  $t$  порядка  $1/\varepsilon$  разность  $z - C_0$  изменится на конечную величину.

#### Список литературы

1. *Татаринов Я.В.* Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: модельные задачи малой размерности // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. № 5. С. 741–749.

#### The Transgression Effect in Nonholonomic Systems with a Small Degrees of Freedom

*N. M. Vidov, A. S. Kuleshov,*

Lomonosov Moscow State University, Russia  
nikitavidov98@gmail.com, alexander.kuleshov@math.msu.ru

In 1986 Ya. V. Tatarinov presented the foundations of the theory of weakly nonholonomic systems. Mechanical systems with nonholonomic constraints depending on a small parameter are considered. It is assumed that for zero value of this parameter the constraints of such a system become integrable; i.e., in this case, we have a family of holonomic systems depending on several arbitrary integration constants. We will assume that these holonomic systems are completely integrable Hamiltonian systems. When the small parameter is not zero, the behavior of such systems can be considered with the help of normalization methods. The behavior of such a system can be represented as a combination of the motion of a slightly modified holonomic system with slowly varying previous integration constants (the transgression effect). In this presentation we

describe the corresponding effect in a several nonholonomic systems with a small degrees of freedom.

---

УДК 531:36 + 539.3

## **Предельные модели динамики систем с проскальзыванием и разрушением**

*А. В. Влахова, Э. И. Макиева*

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
vlakhova@mail.ru, ell96makieva@gmail.com

Рассматривается динамика системы, включающей тела, контакт которых происходит с микропроскальзыванием и хрупким разрушением их поверхностей. Обсуждаются возможности ее исследования при помощи неклассических моделей с условиями непроскальзывания или с первичными связями Дирака.

*Ключевые слова:* трение, промежуточная прослойка, микропроскальзывание, условия непроскальзывания, вакономная механика, неголономная модель, первичные связи Дирака, теория возмущений.

### **1. Введение**

Контактное взаимодействие тел может сопровождаться хрупким разрушением их приповерхностных слоев и образованием между телами тонкой промежуточной прослойки из выколотых элементов [1] (элементы прослойки, например, частицы абразива, могут быть также внесены извне).

Как правило, при описании динамики системы с микропроскальзыванием предполагают, что скорость относительного смещения контактирующих поверхностей тел равна нулю и записывают классическую неголономную модель их движения. В работе показано, что при наличии микропроскальзывания и прослойки в области контакта тел предельный переход к бесконечной жесткости контактных сил (нулевой скорости микропроскальзывания) может порождать неклассические модели.

## 2. Основной результат

В работе исследуется динамика механической системы с голономными стационарными идеальными связями, включающей кинематическую пару с одной относительной степенью свободы. Полагая, что тела кинематической пары достаточно жесткие и имеют несогласованную форму, будем считать, что их контакт происходит в точке, где приложены сила трения и нормальная реакция, равные главным векторам касательных и нормальных напряжений по области контакта. Будем рассматривать линейную зависимость силы трения от скорости микропроскальзывания тел [1, 2]. Влияние прослойки между телами кинематической пары состоит в том [1], что ее элементы расклинивают деформируемые части тел, а их смещение на части области контакта с прослойкой происходит путем перекатывания через ее элементы, в результате чего касательные напряжения в области контакта уменьшаются, а нормальные напряжения — увеличиваются, и, следовательно, потенциальная энергия деформирования тел изменяется. Эффект уменьшения потенциальной энергии за счет возможности перекатывания отвечает появлению дополнительного слагаемого в лагранжиане системы, которое пропорционально квадрату скорости микропроскальзывания тел и по структуре схоже с кинетической энергией «присоединенных масс» в вакономной механике [1,3]. Учет увеличения потенциальной энергии за счет расклинивающего действия элементов прослойки привносит в лагранжиан дополнительное постоянное слагаемое, не оказывающее влияние на динамику системы [1].

Следуя [1,2], можно свести математическую модель динамики системы к возмущенной системе уравнений по малому параметру, отражающему малость характерного значения скорости микропроскальзывания тел по сравнению со скоростями других составляющих системы (например, ее центра масс). В силу линейной зависимости силы трения от скорости микропроскальзывания при переходе к бесконечной жесткости контактных сил между телами кинематической пары этот параметр устремляется к нулю.

В рамках указанного предельного перехода построены неклассическая модель динамики системы со связью, запрещающей проскальзывание тел кинематической пары, которая служит аналогом «промежуточной» модели вакономной механики [3], и модифицированная модель с первичными связями Дирака [2,3], для которой микропроскальзывание тел сохраняется. Ситуации, когда реализуются те или иные связи, разделяются после сравнения порядков величин слагаемых в правых и

левых частях соотношения между скоростью микропроскальзывания тел и обобщенными скоростями. Если при движении системы обобщенные скорости существенно превосходят скорость микропроскальзывания, то возможна реализация первой модели [1]. Если порядок малости слагаемых в правых и левых частях указанных соотношений одинаковы за счет того, что часть обобщенных скоростей соизмерима со скоростью микропроскальзывания, а при части других обобщенных скоростей стоят малые множители, то в системе могут быть реализованы модифицированные первичные связи Дирака, возникающие из-за вырождения ее лагранжиана при переходе к нулевым значениям малых обобщенных скоростей.

Сформулирована и доказана теорема, позволяющая провести оценку погрешности модифицированной модели Дирака.

### 3. Заключение

Проведенное исследование обосновывает использование неклассических моделей при описании динамики систем с проскальзыванием и разрушением.

Результаты работы можно обобщить как на механические системы с несколькими кинематическими парами, каждая из которых имеет одну относительную степень свободы и допускает микропроскальзывание контактирующих тел, так и на системы взаимодействующих тел (в частности, перекатывающихся), для которых относительное движение имеет две степени свободы и скорость относительного верчения тел мала.

### Список литературы

1. *Влахова А.В.* О влиянии разрушения на динамику механических систем // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 734–758.
2. *Влахова А.В.* Математические модели движения колесных аппаратов. М.–Ижевск: АНО ИКИ, 2014. 148 с.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2009. 416 с.

## Asymptotic Models for the Dynamics of Systems with Slip and Fracture

*A. V. Vlachova, E. I. Makieva*

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
vlakhova@mail.ru, ell96makieva@gmail.com

Dynamics of a system consisting of bodies whose mutual contact

interaction is accompanied by brittle fracture of their surface layers is considered. The feasibility of studying such systems using nonclassical models with no-slip conditions or with Dirac primary constraints is discussed.

---

УДК 681.511.46

**Терминальное управление линейными системами с ограничениями по выходной переменной в условиях возмущений**

*С. А. Вражеский, А. И. Сергеев*

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия  
vrazhevskij@gmail.com, sergeew.artur2013@yandex.ru

Решена задача терминального управления линейными динамическими объектами, в том числе с учетом внешних возмущений, со строгими ограничениями на вид траекторий выходного сигнала, начиная с нулевого момента времени.

*Ключевые слова:* терминальное управление, линейные системы, подавление возмущений, ограничение по выходу

### **1. Введение**

Задачам стабилизации за конечное время посвящено большое количество работ, которые можно разделить на несколько смежных направлений, близких по постановке задачи, но отличающихся методами решения и свойствам замкнутой системы. Многие популярные результаты (например, [1, 2]) относятся к негладким методам и не накладывают никакие иные ограничения на вид решений замкнутой системы в пространстве состояний, кроме обеспечения терминальных свойств. С другой стороны, методы управления, накладывающие ограничения на вид траекторий замкнутой системы (например, [3]), обеспечивают только асимптотическую устойчивость. Исследования, обобщающие условия ограниченности решений сразу и в пространстве состояний, и во времени, редки, несмотря на высокую практическую ценность. В текущем исследовании результат [9], в котором описан метод управления с ограничениями по выходной переменной, расширен таким образом, чтобы дополнительно решить задачу терминальной стабилизации.

## 2. Основной результат

Рассмотрим линейную систему с возмущающим воздействием:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad y = Cx,$$

где  $x(t) \in R^n$  — известный вектор состояния,  $u(t) \in R$  — сигнал управления,  $y(t) \in R$  — выходная переменная. Матрицы  $A_{[n \times n]}$ ,  $B_{[1 \times n]} = [0, \dots, 0, b]^T$  и  $C_{[n \times 1]}$  известны, причем  $CB = c_n b \neq 0$ ,  $n > 1$  — порядок системы,  $D$  — известная матрица возмущающих воздействий,  $f(t) \in R$  — неизвестное ограниченное возмущающее воздействие. Будем считать, что условия управляемости и наблюдаемости для системы (1) выполнены. Цель управления задана условием:

$$(2) \quad y(t) \in Y = \{y(t) \in R, t \in [0; T) : \underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)\},$$

где  $\underline{g}(T) = \bar{g}(T) = 0$ ,  $T > 0$ . Рассмотрев замену координат

$$(3) \quad y = \Phi(\varepsilon, t)$$

и с учетом наличия возмущений в (1), получим:

$$(4) \quad \dot{y} = \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t},$$

$$(5) \quad \dot{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( CAx + CBu + Df - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right).$$

Для обеспечения устойчивости траекторий  $\varepsilon$  выберем закон управления в виде

$$(6) \quad u = -(CB)^{-1} \left( CAx + k\varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right),$$

где  $k > 0$  — настраиваемый коэффициент. Сформулируем теорему.

**Теорема 1.** Пусть для объекта управления (1) определены ограничивающие функции  $\underline{g}(t)$  и  $\bar{g}(t)$ , найдено преобразование координат (1), удовлетворяющее условиям: область значений функции ограничена  $\underline{g}(t) < \Phi(\varepsilon, t) < \bar{g}(t)$ ,  $0 \leq t < T$ ; всегда существует обратное преобразование  $\varepsilon = \Phi^{-1}(y, t)$ ,  $\forall x \in X$ ,  $0 \leq t < T$ ; функция  $\Phi(\varepsilon, t)$  непрерывно дифференцируема по  $\varepsilon, t$ , причем  $\det \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$ ,  $x \in X$ ; функции  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon}$  ограничены  $\forall \varepsilon \in R, t \geq 0$ ;  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \varepsilon = 0$ . Тогда закон управления (6) обеспечивает выполнение целевого условия (2) с заданным временем установления  $T$ .

Доказательство теоремы представлено в [5].

### 3. Результаты моделирования

На рис. 1 представлены 2 примера замкнутой системы с неустойчивой матрицей состояния объекта (1), с различными видами ограничивающих функций и различным заданным временем установления. Сигналы  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  соответствуют траектории замкнутой системы без внешних возмущений и с возмущениями. В качестве функции возмущений выбран мультигармонический сигнал с амплитудами гармоник, соизмеримыми с максимальными значениями ограничивающей функции.

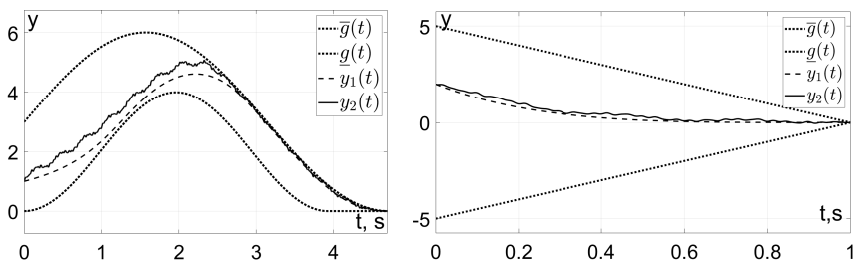


Рис. 1: Графики замкнутой системы при разных  $\bar{g}(t)$ ,  $\tilde{g}(t)$ ,  $T$ .

Результаты моделирования подтверждают выполнение цели управления, существование решений строго внутри выбранных границ с нулевого момента времени, терминальную стабилизацию объекта с заданным временем установления в условиях внешних возмущающих воздействий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 25-19-20075, <https://rscf.ru/project/25-19-20075/>) в ИПМаш РАН.

#### Список литературы

1. Song Y., Wang Y., Holloway J., Krstic M. Time-Varying Feedback for Regulation of Normal-Form Nonlinear Systems in Prescribed Finite Time // Automatica. 2017. V. 83. P. 4260–4265.
2. Orlov Y., Kairuz R.I.V., Aguilar L.T. Prescribed-Time Robust Differentiator Design Using Finite Varying Gains // IEEE Control Systems Letters. 2021. V. 6. P. 620–625.
3. Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 106–125.

4. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. 2021. № 4. С. 121–139.
5. *Вразжевский С.А.* Терминальная стабилизация динамических объектов с ограничениями по выходной переменной // Мехатроника, автоматизация, управление. 2026. № 4. (принята к печати).

## **Terminal Control for Linear Systems under Output Signal Bounds and External Disturbances**

*S. A. Vrazhevsky, A. I. Sergeev*

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia  
vrazhevskij.s@gmail.com, sergeew.artur2013@yandex.ru

The problem of terminal control for linear dynamic systems is solved, including taking into account external disturbances, with strict restrictions on the output signal trajectories, starting from the zero moment of time.

---

## Бифуркации автоколебательных режимов движения шагающего аппарата с ветротурбиной в потоке среды

*М. А. Гарбуз, Л. А. Климина*

НИИ Механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
misha-garbus@yandex.ru, klimina@imec.msu.ru

В работе исследуется динамика шагающего аппарата с пропеллерной ветротурбиной, расположенного на горизонтальной шероховатой плоскости в стационарном потоке ветра. Механическая система представляет собой машину Чебышева, связанную с пропеллером посредством редуктора. Движение аппарата описывается автономной динамической системой с одной степенью свободы и цилиндрическим фазовым пространством, близкой к гамильтоновой. Математическая модель системы сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, которое содержит слагаемые, отвечающие воздействию потока среды на ветротурбину и корпус устройства. Проведен анализ положений равновесия и их устойчивости в зависимости от параметров системы. Основное внимание уделено исследованию колебательных режимов движения, соответствующих периодическим траекториям на фазовом цилиндре. Рассматривается эволюция этих режимов и бифуркации, возникающие при изменении параметров, что позволяет определить условия движения аппарата навстречу потоку ветра.

*Ключевые слова:* шагающий аппарат, ветротурбина, автоколебания, бифуркации, динамическая система, гамильтонова система, устойчивость.

### 1. Введение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из стопоходящей машины Чебышева и пропеллерной ветротурбины. Машина представляет собой плоскую платформу и четыре идентичных «ноги», закрепленных на платформе (рис. 1). Каждая такая «нога» состоит из трехзвенного лямбда-механизма с закрепленной голенью на свободном конце. Механизм находится на горизонтальной плоскости в стационарном потоке ветра, направленном параллельно линии движения корпуса. Считаем, что проскальзывание между плоскостью и опорными «голенями» отсутствует, корпус все время движения остается горизонтальным, а «голень» механизма попарно соединены жесткими невесомыми рейками, что исключает их отклонение от вертикали. При наложенных связях механизм описывается как динамическая система с одной

степенью свободы [1].

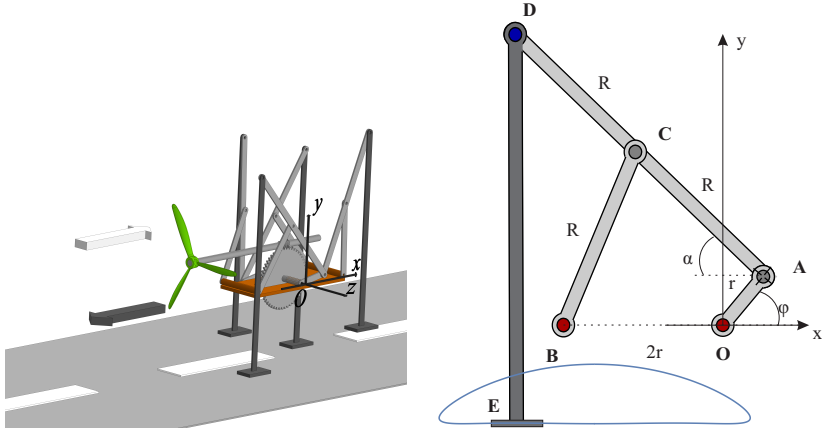


Рис. 1: Слева: общая схема механической системы. Справа: детальная схема лямбда-механизма

Положение системы задается углом поворота  $\varphi$  между платформой и кривошипом  $OA$ .

Считаем, что поток ветра имеет плотность  $\rho$ , постоянную скорость  $V$  и горизонтальное направление навстречу пропеллеру. Следуя квазистатическому подходу [2], сведем воздействие потока к силам лобового сопротивления, действующим на пропеллер и корпус, соответственно, а также к аэродинамическому моменту, который действует со стороны потока на пропеллер. Влиянием потока на другие элементы системы будем пренебрегать.

## 2. Уравнения движения

Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид:

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial z} = \omega, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \varepsilon Q(\varphi, z).$$

Здесь  $\tau$  — характерный масштаб по времени,  $H(\varphi, z) = \frac{z^2}{2k(\varphi)} + jP(\varphi)$  — функция Гамильтона,  $Q(\varphi, z)$  — безразмерная обобщенная сила,  $\varepsilon$  — безразмерный параметр, отвечающий за интенсивность неконсервативных слагаемых системы (1) по сравнению с консервативными слагаемыми.

Все функции, стоящие в правой части системы (1),  $\pi$ -периодические. Поэтому фазовое пространство системы представляет собой цилиндр ( $\varphi \bmod \pi, \omega$ ). Положения кривошипа  $\varphi = \pm\pi/2$  соответствуют смене опорных ног. Таким образом, при указанных значениях фазовые траектории теряют гладкость (но при этом остаются непрерывными).

В работе [1] были исследованы самоподдерживающиеся режимы движения, соответствующие перемещению корпуса механизма с постоянной средней скоростью навстречу ветру. Задача настоящей работы состоит в изучении возможных движений автоколебательного типа.

### 3. Неподвижные точки, анализ устойчивости

Показано, что в системе может быть не более 4 положений равновесия. Доказано, что положение равновесия вблизи точки  $\varphi = 0$  всегда является седлом.

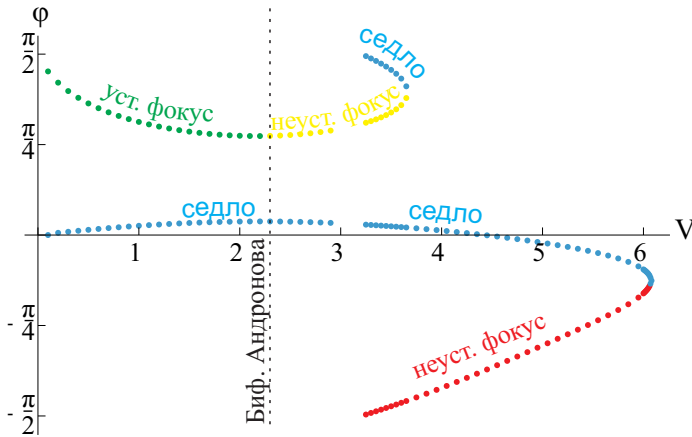


Рис. 2: Возможные положения равновесия при различных значениях скорости потока  $V$

На рис. 2 представлена диаграмма, демонстрирующая зависимость положений равновесия от скорости набегающего потока. Если скорость потока нулевая, то механизм имеет 2 положения равновесия:  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ . Первое является седлом и соответствует положению, при котором две ноги в фазе переноса занимают наивысшее положение. Второе — устойчивый фокус. В этом положении механизм обладает

наименьшей потенциальной энергией, опорные ноги механизма попарно сменяются.

При увеличении скорости ветра от 0 до 3,2 м/с на фазовой плоскости существует только 2 указанных положения равновесия. При значении  $V = V_1 = 2,2$  м/с происходит мягкая потеря устойчивости, при которой фокус теряет устойчивость и вокруг него рождается притягивающий предельный цикл. Затем этот цикл расширяется до момента слияния с сепаратрисой седла и разрушается.

В некотором диапазоне существует 4 положения равновесия: 2 неустойчивых фокуса и 2 седла. Затем последовательно происходят седлоузловые бифуркации и положения равновесия разрушаются.

#### 4. Заключение

В работе исследована динамика шагающего аппарата с пропеллерной ветротурбиной в потоке среды. Исследованы возможные положения равновесия и условия их устойчивости. Показано, что при некотором значении скорости ветра в системе происходит бифуркация Андронова-Хопфа, сопровождающаяся мягкой потерей устойчивости. При дальнейшем изменении этого параметра наблюдаются седлоузловые бифуркации и возникновение до четырех положений равновесия.

Обнаруженные автоколебательные режимы соответствуют замкнутым траекториям на фазовом цилиндре и описывают периодическое движение аппарата. Полученные результаты позволяют определить условия реализации самоподдерживающегося движения аппарата на встречу потоку.

Исследование выполнено в рамках госзадания МГУ им. М.В. Ломоносова.

#### Список литературы

1. *Garbuz M., Klimina L., Samsonov V.* Wind Driven Plantigrade Machine Capable of Moving Against the Flow // Applied Mathematical Modelling. 2022. V. 110. P. 17–27.
2. *Ложкин Б.Я., Самсонов В.А.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 2012.

# **Bifurcations of Self-Oscillatory Regimes of a Walking Mechanism With a Wind Turbine in a Wind Flow**

*M. A. Garbuz, L. A. Klimina*

Institute of Mechanics of LMSU, Moscow, Russia  
misha-garbuz@yandex.ru, klimina@imec.msu.ru

The paper investigates the dynamics of a walking mechanism equipped with a propeller wind turbine, positioned on a rough horizontal surface in a steady wind flow. The mechanical system is a Chebyshev plantigrade machine connected to the propeller via a gearbox. The motion of the vehicle is described by an autonomous dynamical system with one degree of freedom and a cylindrical phase space, which is close to Hamiltonian. The mathematical model of the system reduces to a second-order differential equation containing terms that account for the interaction of the flow with the wind turbine and the vehicle body. An analysis of equilibrium positions and their stability depending on the system parameters is carried out. The main attention is paid to the study of oscillatory motion regimes corresponding to periodic trajectories on the phase cylinder. The evolution of these regimes and the bifurcations that occur as the parameters vary are examined, making it possible to determine the conditions under which the vehicle moves against the wind flow.

---

## Максимизация средней скорости робота тримарана с помощью аналитических оценок

С. А. Голованов<sup>1</sup>, Л. А. Климина<sup>2</sup>, В. А. Самсонов<sup>2</sup>

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия<sup>1</sup>

НИИ механики МГУ, Москва, Россия<sup>2</sup>

sergey.golovanov@math.msu.ru, klimina@imec.msu.ru, samson@imec.msu.ru

Исследуется перемещение робота тримарана в жидкости за счет движения внутренних масс и гидродинамических сил. Предлагается аналитический метод нахождения значений геометрических параметров, при которых повышается значение средней скорости центра масс робота на установившемся режиме движения.

*Ключевые слова:* робот тримаран, движение внутренних масс, установочный угол

### 1. Введение

Перемещение объектов в жидкости, вызванное движением внутренних масс, интенсивно изучается как одна из актуальных проблем робототехники. Подробный обзор основных результатов в этой области можно найти, например, в [1].

В данной работе исследуется движение в жидкости робота тримарана, вызванное вращением внутреннего маховика. Приводятся конструкторские решения по оптимизации его скоростных характеристик.

### 2. Постановка задачи

Корпус робота тримарана состоит из центральной платформы (капсулы) и трех одинаковых цилиндрических поплавков (рис. 1), имеющих в сечении форму аэродинамического профиля НАСА0015. Центр масс капсулы совпадает с центром масс всей системы и находится в точке  $G$ .  $G\xi\eta$  — оси геометрической и динамической симметрии капсулы. Хорды задних поплавков симметричны относительно оси  $G\xi$  и образуют с данной осью угол  $\beta$ , называемый установочным углом. Внутри капсулы установлен динамически симметричный маховик с осью вращения, проходящей через центр масс капсулы и перпендикулярной основанию платформы.

Для изучения движения робота тримарана на поверхности жидкости введена горизонтальная система координат  $Oxy$ .  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  — соответственно координаты и скорости центра масс тримарана,  $\phi$  — угол курса (угол между осью  $Ox$  и осью  $G\xi$ ).

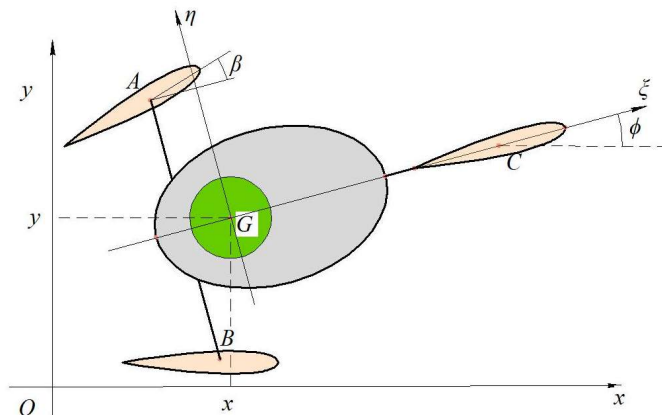


Рис. 1: Конструкция робота тримарана

К маховику прикладывается управляющий момент, являющийся периодической функцией времени. Периодические колебания маховика приводят к периодическим колебаниям всего корпуса и возникновению гидродинамических сил, описываемых на основе квазистатической модели, подробно рассмотренной в [2]. Уравнения движения строятся на основе Лагранжева формализма. В [2] была предложена функция управления, выводящая движение системы на установившийся режим, при котором  $\phi(t)$ ,  $y(t)$  — периодические функции времени,  $x(t) \nearrow$  — безреверсное движение вдоль оси  $Ox$ . Средние значения проекций тянущей силы (результатирующая гидродинамических сил) за период удовлетворяют условиям:  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ . Значение установочного угла  $\beta$  бралось нулевым. Уравнения движения интегрировались численно, с помощью метода Рунге-Кутты.

В [3] рассматривалось движение робота тримарана из состояния покоя. Дана аналитическая оценка значений  $\beta$ , приводящих к увеличению  $F_x$ .

В данной работе рассматривается установившийся режим движения и строится аналитическая оценка значений  $\beta$ , повышающих величину проекции средней скорости  $\dot{x}$  на установившемся режиме.

### 3. Основной результат

Движение системы на периодическом режиме разбивается на четыре фазы, характеризующиеся знаками  $\phi$  и  $\dot{\phi}$ . В результате введения дополнительных предположений о малости некоторых углов, о соотношениях между средними значениями угловых скоростей и внешних сил на различных фазах установившегося движения, а также построения оценок для средних сил установлено, что максимальная средняя скорость робота на установившемся режиме движения достигается при значениях установочного угла  $\beta$ , близких к нулю.

Исследование выполнено в рамках госзадания МГУ имени М.В. Ломоносова

#### Список литературы

1. *Килин А.А., Кленов А.И., Тенев В.А.* Управление движением тела с помощью внутренних масс в вязкой жидкости // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 4. С. 445–460.
2. *Dosaev M., Golovanov S., Klimina L., Selyutskiy Y.* Serpentine Motion of a Trimaran Robot // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: J. Mechanical Engineering Science. 2024. V. 238. No. 3. P. 737–745.
3. *Голованов С.А., Климина Л.А., Самсонов В.А.* Аналитическое исследование эффективности разгона робота тримарана // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2025. № 5. С. 171–178.

#### Maximizing the Average Speed of a Trimaran Robot Using Analytical Estimates

*S. A. Golovanov<sup>1</sup>, L. A. Klimina<sup>2</sup>, V. A. Samsonov<sup>2</sup>*

Lomonosov Moscow State University, Russia<sup>1</sup>

Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia<sup>2</sup>  
sergey.golovanov@math.msu.ru, klimina@imec.msu.ru, samson@imec.msu.ru

The motion of a trimaran robot in a fluid due to the motion of its internal masses and hydrodynamic forces is studied. An analytical method for determining the geometric parameters is proposed, assuming the average velocity of the robot's center of mass to establish a given motion mode.

---

**Построение оценок для максимальных абсолютных значений  
переменных состояния нелинейных динамических систем,  
замкнутых обратной связью**

*А. Е. Голубев*

ИПМех РАН, Москва, Россия  
v-algolu@hotmail.com

Рассматривается задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейных динамических систем с учетом ограничений на абсолютные величины переменных состояния. Для стабилизирующей обратной связи, построенной при помощи метода линеаризации обратной связью по состоянию в сочетании с дальнейшим использованием линейного модального управления, получены гарантированные оценки максимальных значений абсолютных величин переменных состояния замкнутой системы.

*Ключевые слова:* стабилизация, линеаризация обратной связью по состоянию, бэкстепинг, барьерная функция Ляпунова

### 1. Постановка задачи

Исследуется задача стабилизации нулевого значения вектора состояния нелинейной динамической системы, которая может быть записана в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u, \end{aligned}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния системы,  $u \in \mathbb{R}$  — управление, функции  $f(x)$  и  $g(x)$  локально липшицевы,  $g(x) \neq 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Для произвольных заданных положительных констант  $M_j > 0$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , требуется найти обратную связь  $u = u(x)$  по состоянию, обеспечивающую для начальных значений  $x(0)$  таких, что  $|x_j(0)| < M_j$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , выполнение на решениях замкнутой системы (1) условия  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  с учетом гарантированных оценок

$$(2) \quad |x_j(t)| < M_j, \quad j \in \overline{1, n}, \quad t \geq 0.$$

Здесь  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ .

## 2. Решение задачи стабилизации и оценка абсолютных величин переменных состояния

С использованием управления на основе метода линеаризации обратной связью, имеющего вид

$$(3) \quad u = \frac{1}{g(x)} \left( -f(x) - \sum_{i=1}^n \kappa_{in} x_i \right),$$

и замены переменных состояния

$$(4) \quad z_1 = x_1, \quad z_j = x_j + \sum_{i=1}^{j-1} \kappa_{ij} x_i, \quad j \in \overline{2, n},$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{jj} &= \sum_{s=1}^j \bar{c}_s, \quad \kappa_{1j} = \prod_{s=1}^j \bar{c}_s, \\ \kappa_{j-s+1,j} &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq j} \bar{c}_{i_1} \bar{c}_{i_2} \dots \bar{c}_{i_s}, \quad s = \overline{2, j-1}, \end{aligned}$$

замкнутая обратной связью (3) система (1) запишется как

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - \bar{c}_1 z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3 - \bar{c}_2 z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n - \bar{c}_{n-1} z_{n-1}, \\ \dot{z}_n &= -\bar{c}_n z_n, \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{c}_j > 0$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , — произвольные положительные постоянные, определяющие корни характеристического уравнения системы (5), которые совпадают с  $-\bar{c}_j < 0$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , что гарантирует асимптотическую устойчивость в целом положения равновесия  $z = 0$  системы (5),  $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Отметим, что в силу равенств (4) положение равновесия  $x = 0$  замкнутой системы (1) глобально асимптотически устойчиво, а корни характеристического уравнения также равны  $-\bar{c}_j < 0$ ,  $j \in \overline{1, n}$ .

С использованием барьерной функции Ляпунова по аналогии с рассуждениями, рассмотренными в [1, 2], показано, что для любых констант  $N_j > 0$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , таких, что  $\bar{c}_j N_j \geq N_{j+1}$ ,  $j \in \overline{1, n-1}$ , и произвольных начальных значений  $z_j(0)$ ,  $|z_j(0)| < N_j$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , решения

$z = z(t)$  системы (5) удовлетворяют неравенствам

$$(6) \quad |z_j(t)| < N_j, \quad j \in \overline{1, n}, \quad t \geq 0.$$

Далее, при помощи соотношений (4), принимая во внимание неравенства (6), получены гарантированные оценки (2) для переменных состояния  $x = x(t)$  системы (1), замкнутой обратной связью (3).

Работа выполнена по теме госзадания (№ госрегистрации 124012500443-0).

#### Список литературы

1. *Голубев А.Е.* Стабилизация нелинейных динамических систем с учетом ограничений на состояния при помощи метода бэкстеппинга // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 5. С. 660–671.
2. *Голубев А.Е.* Стабилизация цепочки интеграторов произвольного порядка с учетом ограничений на состояние // Изв. РАН. ТиСУ. 2025. № 3. С. 121–132.

### Estimation of Maximum Absolute Values of State Variables of Nonlinear Dynamic Systems With State Feedback Control

*A. E. Golubev*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
v-algolu@hotmail.com

The problem of stabilizing the zero value of the state vector of nonlinear dynamic systems is considered, taking into account constraints on the absolute values of the state variables. For a stabilizing feedback constructed using the state feedback linearization approach in combination with subsequent use of linear modal control, guaranteed estimates of the maximum absolute values of the closed-loop system's state variables are obtained.

---

## Управление движением квадрокоптера на базе оценки вектора состояния наблюдателем

А. Е. Голубев, А. А. Хорошева

ИПМех РАН, Москва, Россия  
v-algolu@hotmail.com, a.khoroscheva@yandex.ru

Рассматривается задача стабилизации траектории пространственного движения квадрокоптера в условиях неполноты измеряемой информации о состоянии системы. Осуществлен синтез законов управления в виде обратных связей по измеряемому выходу с использованием оценки вектора состояния наблюдателем с высокими коэффициентами усиления.

*Ключевые слова:* линеаризация обратной связью по состоянию, наблюдатель состояния, стабилизация, квадрокоптер

### 1. Введение

В настоящее время большое количество публикаций (см., например [1, 2]) посвящено исследованиям в области разработки алгоритмов автоматического управления движением квадрокоптеров. Как правило, при решении задач управления измерениям доступна только часть вектора состояния аппарата. Одним из методов оценки полного вектора состояния динамической системы является построение наблюдателя состояния. В работе решается задача стабилизации траектории пространственного движения квадрокоптера с использованием оценки вектора состояния системы при помощи наблюдателя с высокими коэффициентами усиления.

### 2. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения пространственного движения квадрокоптера как твердого тела, которые могут быть представлены следующим образом [1]:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x^{(4)} \\ y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \frac{F}{m} \cos \varphi \begin{pmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \sec^2 \varphi & \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta \\ 0 & \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{M}_x \\ \tilde{M}_y \end{pmatrix}, \\ \ddot{z} = -g + \frac{F}{m} \cos \varphi \cos \theta, \quad \ddot{\psi} = \tilde{M}_z,$$

где  $x, y, z$  — координаты центра масс квадрокоптера в инерциальной системе отсчета;  $\varphi, \theta, \psi$  — углы крена, тангажа и рыскания, соответственно;  $m$  — масса квадрокоптера;  $g$  — ускорение свободного падения;  $F$  — сила тяги, создаваемая моторами аппарата;  $\tilde{M} = (\tilde{M}_x, \tilde{M}_y, \tilde{M}_z)^T$  — вектор управляющих моментов;  $f_1, f_2$  — функции переменных состояния, вид которых указан в [1]. Предполагается, что измерениям доступны переменные  $x, y, z, \psi$ .

Решается задача стабилизации заданной траектории  $x = x_r(t), y = y_r(t), z = z_r(t), \psi = \psi_r(t)$  пространственного движения квадрокоптера, которая заключается в следующем: найти такие силу тяги  $F$  и моменты  $\tilde{M}$  как функции измеряемых переменных, гарантирующие выполнение условий  $x(t) - x_r(t) \rightarrow 0, y(t) - y_r(t) \rightarrow 0, z(t) - z_r(t) \rightarrow 0, \psi(t) - \psi_r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

### 3. Построение наблюдателя и решение задачи стабилизации

Используем законы управления в виде обратных связей по состоянию системы (1), предложенные в работе [1]. Для оценки неизмеряемых компонент  $x^{(i)}, y^{(i)}, i = \overline{1, 3}, \dot{z}, \dot{\psi}$  состояния динамической системы (1), где через  $(i)$  обозначен порядок производной по времени, предлагается наблюдатель состояния, имеющий следующий вид:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12} + \kappa_1 l_{11}(x - \xi_{11}), & \dot{\xi}_{21} &= \xi_{22} + \kappa_2 l_{21}(y - \xi_{21}), \\ \dot{\xi}_{12} &= \xi_{13} + \kappa_1^2 l_{12}(x - \xi_{11}), & \dot{\xi}_{22} &= \xi_{23} + \kappa_2^2 l_{22}(y - \xi_{21}), \\ \dot{\xi}_{13} &= \xi_{14} + \kappa_1^3 l_{13}(x - \xi_{11}), & \dot{\xi}_{23} &= \xi_{24} + \kappa_2^3 l_{23}(y - \xi_{21}), \\ \dot{\xi}_{14} &= f_{11} + \kappa_1^4 l_{14}(x - \xi_{11}), & \dot{\xi}_{24} &= f_{21} + \kappa_2^4 l_{24}(y - \xi_{21}), \\ \dot{\xi}_{31} &= \xi_{32} + \kappa_3 l_{31}(z - \xi_{31}), & \dot{\xi}_{41} &= \xi_{42} + \kappa_4 l_{41}(\psi - \xi_{41}), \\ \dot{\xi}_{32} &= f_{31} + \kappa_3^2 l_{32}(z - \xi_{31}), & \dot{\xi}_{42} &= f_{41} + \kappa_4^2 l_{42}(\psi - \xi_{41}). \end{aligned}$$

Здесь переменная  $\xi_{1j}$  рассматривается как оценка  $x^{(j-1)}$ ,  $\xi_{2j}$  — как оценка  $y^{(j-1)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ ,  $\xi_{3j}$  — как оценка  $z^{(j-1)}$ ,  $\xi_{4j}$  — как оценка  $\psi^{(j-1)}$ ,  $j = 1, 2$ ; постоянные  $\kappa_i > 1, i = \overline{1, 4}$ , представляют собой настраиваемые параметры наблюдателя; коэффициенты  $l_{ij}, i = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 4}$ , выбираются так, чтобы матрицы  $A_i + L_i C_i$  были гурвицевы, где

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_i = (l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, l_{i4})^T, C_i = (1, 0, 0, 0), i = 1, 2,$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L_i = (l_{i1}, l_{i2})^T, C_i = (1, 0), i = 3, 4.$$

В наблюдателе (2) в функциях  $f_{i1}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , переменные состояния системы (1) заменены на соответствующие оценки  $\xi_{ij}$ . Коэффициенты усиления наблюдателя (2) выбираются согласно результатам, полученным в работе [2], и гарантируют асимптотическое стремление ошибки оценки состояния системы (1) к нулю. Далее, оценка состояния системы (1) наблюдателем (2) используется в стабилизирующих обратных связях по состоянию, полученных в [1], вместо вектора состояния. Работоспособность полученных алгоритмов управления следует из выполнения нелинейного принципа разделения и проверена при помощи численного моделирования.

#### 4. Заключение

Предложено решение задачи стабилизации траектории движения квадрокоптера в пространстве на основе оценки вектора состояния при помощи наблюдателя с высокими коэффициентами усиления. Предполагается, что измерениям доступны координаты центра масс аппарата и угол рысканья.

Работа выполнена по теме госзадания (№ государственной регистрации 124012500443-0)

#### Список литературы

1. Голубев А.Е., Хорошева А.А., Васенин С.А. Построение и стабилизация траекторий пространственного движения квадрокоптера // Изв. РАН. ТиСУ. 2025. № 2. С. 109–124.
2. Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A. Application of Enhanced Extended Observer in Station-Keeping of a Quadrotor with Unmeasurable Pitch and Roll Angles // IFAC PapersOnLine, Elsevier Publ. 2019. V. 52(16). P. 837–842.

# Control of Quadcopter Motion Based on Estimation of State Vector by Observer

*A. E. Golubev, A. A. Khorosheva*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
v-algolu@hotmail.com, a.khorosheva@yandex.ru

The problem of stabilizing reference trajectories of quadcopter spatial motion is considered. We suppose that the center of mass coordinates and yaw angle values only are available for direct measurements. Feedback control laws are synthesized using state vector estimates made by a high-gain observer.

---

УДК 531.38

## Управление перевернутым маятником на колесе без обода

*Ю. Ф. Голубев, В. В. Корянов*

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru

Исследуется упрощенная динамическая модель движения системы «штанга на колесе без обода», которая находится на наклонной опоре. Найдены условия, при выполнении которых штанга вызывает движение колеса вверх по склону из положения равновесия. Выполнено качественное исследование полученных уравнений движения.

*Ключевые слова:* колесо без обода, штанга, оптимальное управление, склон, компьютерное моделирование

### 1. Введение

Движение колеса без обода можно рассматривать как простейший аналог двуногой ходьбы [1]. Пассивное стационарное движение колеса без обода в горизонтальном направлении, а тем более вверх по склону даже при наличии начальной скорости невозможно из-за невосполнимых потерь кинетической энергии при ударе спиц об опорную поверхность. В этом случае нужен дополнительный внешний источник энергии, им может быть сила тяжести. Изменяя наклон штанги относительно вертикали электроприводом, можно смещать центр масс системы и тем самым нужным образом влиять на движение колеса.

Установлено энергетически оптимальное управление движением штанги. Построено отображение Пуанкаре для последовательности шагов колеса и выявлены условия существования стационарных точек отображения. Для стационарного движения дана аналитическая оценка максимального управляющего штангой момента в зависимости от параметров системы.

Данная работа продолжает цикл исследований, приведенных в [2].

## 2. Кинетический момент и силовая функция системы

Колесо без обода, рассматриваемое как абсолютно твердое тело, представляет собой однородный центральный диск, к которому по периферии равномерно прикреплены одинаковые однородные радиальные спицы длины  $l$  от центра колеса до края спицы. Угол между спицами пусть будет  $2\alpha > 0$ . Он предполагается одинаковым для любой пары спиц (см. рис. 1). Масса колеса равна  $M$ , его осевой момент инерции относительно конца спицы равен  $I$ , а центр масс колеса совпадает с центром диска. К центру диска шарнирно прикреплена штанга массы  $m$ . Центр масс штанги расположен в точке  $C$  на расстоянии  $a$  от центра колеса. Момент инерции штанги относительно ее центра масс обозначим  $J$ . На систему действует сила тяжести с ускорением  $\mathbf{g}$ , реакция опоры, а также управляющий момент между колесом и штангой.

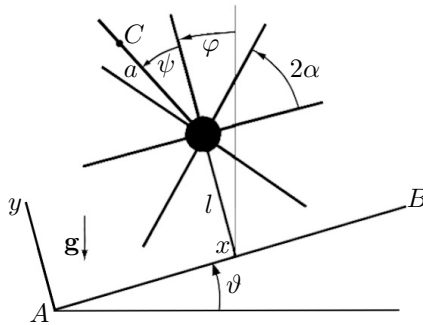


Рис. 1: Перевернутый маятник на колесе без обода

На рис. 1 приведены (в том числе) используемая правая декартова система координат, а также координата  $x$  (наиболее удаленная от  $A$  точка опоры колеса), и углы  $\varphi$ ,  $\psi$ . Цель управления состоит в том, чтобы вывести колесо из положения равновесия с опорой на две спицы и заставить его катиться по прямой  $AB$ .

Координаты и скорости центра масс штанги имеют вид

$$x_b = x - l \sin(\varphi - \theta) - a \sin(\gamma - \theta), \quad y_b = l \cos(\varphi - \theta) + a \cos(\gamma - \theta),$$

$$\dot{x}_b = -l\dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) - a\dot{\gamma} \cos(\gamma - \theta), \quad \dot{y}_b = -l\dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) - a\dot{\gamma} \sin(\gamma - \theta),$$

где  $\gamma = \varphi + \psi$  есть угол между штангой и вертикалью.

Кинетическая энергия системы выражается формулой

$$T = (I + ml^2) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + mal\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos \psi + (J + ma^2) \frac{(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2}{2}.$$

Кинетический момент  $\mathbf{K}$  системы относительно точки  $(x, 0)$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_z \{ I\dot{\varphi} + m[l\dot{\varphi}(l + a \cos \psi) + a(\dot{\varphi} + \dot{\psi})(a + l \cos \psi)] + J(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \},$$

где  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор оси  $Az$ .

Силовая функция  $U$  системы дается выражением

$$U = -g[(M + m)l \cos \varphi + ma \cos \gamma].$$

### 3. Основные результаты и выводы

Было проведено исследование [3], по результатам которого можно сделать следующие выводы.

1. Корпус при двуногой ходьбе может играть активную роль, способствуя движению аппарата или затрудняя его.

2. Для обеспечения максимального ускорения колеса в одноопорной фазе движения штанга должна быть в допустимых пределах максимально отклонена от вертикали в сторону желаемого ускорения колеса. При отсутствии ограничений на наклон штанги она должна составлять с вертикалью прямой угол.

3. Оптимальный в смысле максимума угловой скорости колеса закон управления штангой на последовательности шагов отличается от локально оптимального закона управления, полученного для одноопорной фазы движения. Оптимальный закон требует сохранять положение штанги, соответствующее нижней границе допустимой зоны отклонения штанги от вертикали.

4. Последовательность угловых скоростей при смене опорных ног, сопровождаемой ударами об опорную поверхность, имеет при достаточном угле наклона штанги устойчивую неподвижную точку, соответствующую стационарной угловой скорости вращения колеса. Стационарная угловая скорость колеса зависит от ограничений на управление.

5. Установлено, что силовой управляющий момент зависит лишь от момента, создаваемого весом штанги, и от момента, создаваемого силой инерции, соответствующей проекции ускорения центра колеса на перпендикуляр к штанге, повернутый относительно штанги в положительном направлении. Найдена расчетная формула для максимального управляющего силового момента, соответствующая стационарному движению колеса в зависимости от углов поворота штанги.

#### Список литературы

1. *McGeer Tad.* Passive Dynamic Walking // International Journal of Robotics Research. 1990. Vol. 9. No. 2. P. 62–82.
2. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов. М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018.
3. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Перевернутый маятник на колесе без обода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2025. № 2.

### Inverted Pendulum Control on a Rimless Wheel

*Yu. F. Golubev, V. V. Koryanov*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia  
golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru

A simplified dynamic model of the motion of a “rod on a rimless wheel” system located on an inclined support is investigated. Conditions are found under which the rod causes the wheel to move uphill from its equilibrium position. A qualitative analysis of the resulting equations of motion is performed.

---

**Прямое управление положением конечной точки  
манипулятора с неопределенными массо-инерционными  
характеристиками**

*П. П. Грезнев, С. А. Краснова*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
greznevp@gmail.com, skrasnova@list.ru

Для манипуляторов с избыточным числом степеней свободы предложен метод синтеза ограниченных обобщенных моментов, обеспечивающих отслеживание конечной точкой манипулятора заданной траектории в условиях неопределенных массо-инерционных характеристик. Данный подход не требует решения обратной задачи кинематики и снижает вычислительную нагрузку.

*Ключевые слова:* конечная точка манипулятора, неопределенные параметры, метод иерархии управлений, сигмовидное управление

В качестве модели объекта управления рассматривается механическая часть  $n$ -звенного полноприводного манипулятора

$$(1) \quad \dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = H^{-1}(q_1)[u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1)]; \quad y = h(q_1),$$

где  $q_1, q_2 \in R^n$  — измеряемые векторы обобщенных координат и скоростей;  $y \in Y \subset R^n$  — вектор положения конечной точки манипулятора,  $Y$  — рабочее пространство, определяемое допустимыми конфигурациями и длиной звеньев манипулятора;  $H_{n \times n}(q_1) > 0$  — матрица инерции,  $\det H^{-1}(q_1) \neq 0$ ;  $C_{n \times n}(q_1, q_2)$  — матрица центробежных и кориолисовых сил;  $G_{n \times 1}(q_1)$  — вектор гравитационных сил. Управлением является вектор обобщенных моментов  $u \in R^n$ , в процессе регулирования нужно обеспечить их гладкость и ограниченность:

$$(2) \quad \|u(t)\| \leq U, \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \bar{U}, \quad t \geq 0.$$

Рассматривается задача управления положением конечной точки на плоскости или в пространстве для манипуляторов с избыточным числом степеней свободы 2 или 3 соответственно. Учитывается точечная масса схвата с грузом, которая меняется в процессе управления и порождает параметрическую неопределенность модели (1). Ставится задача синтеза статической обратной связи с ограниченным управлением, обеспечивающим отслеживание конечной точкой манипулятора

заданной траектории  $y_r(t) \in Y$  с некоторой точностью

$$(3) \quad \|y(t) - y_r(t)\| \leq \delta_1, \quad t > T > 0.$$

Обычно обратная задача кинематики  $q_1 = h^{-1}(y_1)$  не имеет аналитического решения и требует применения численных методов, которые сильно зависят от выбора начальной точки и часто не позволяют получить решение с нужной точностью за разумное время.

В работе [1] предложен прямой метод управления конечной точкой в условиях неопределенности на основе канонической формы вход-выход, не требующий решения обратной задачи кинематики. Для синтеза робастного управления применялся динамический наблюдатель возмущений.

В данной работе задача (3) также решается прямым методом, но без дополнительного расширения пространства состояний замкнутой системы. В рамках блочного подхода формализована специальная настройка сигмовидных обратных связей на основе неравенств, обеспечивающих подавление неопределенностей. Использование известных свойств производной гамильтониана лагранжевых систем позволило синтезировать робастное ограниченное управление, реализуемое с минимальными вычислительными операциями в реальном времени.

Запишем первое уравнение системы (1) относительно ошибок слежения  $e_1 = y - y_r \in R^n$ :

$$(4) \quad \dot{e}_1 = B(q_1)q_2 - \dot{y}_r, \quad B_{n \times n} = (\partial h / \partial q_1),$$

где матрица частных производных имеет полный ранг всюду кроме конечного числа особых точек. В рамках блочного подхода декомпозируем задачу синтеза на две элементарные подзадачи: синтез фиктивного управления в подсистеме (4); синтез истинного управления  $u$ .

В качестве фиктивного управления рассматривается вектор  $q_2$ , выбираемый в виде функций обобщенного гиперболического тангенса

$$(5) \quad q_2^* = -PM_1 \tanh(K_1 e_1),$$

где  $M_1, K_1 \in R^{n \times n}$  — диагональные матрицы коэффициентов усиления,  $P \in R^{n \times n}$  — бинарная матрица перестановок. Введена невязка между реальным и желаемым (5) фиктивным управлением  $e_2 = q_2 - q_2^*$ , с учетом (1), (4) составлена виртуальная система

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= B(q_1)(e_2 - PM_1 \tanh(K_1 e_1)) - \dot{y}_r, \\ \dot{e}_2 &= H^{-1}(q_1)[u - C(q_1, q_2)(e_2 + q_2^*) - G(q_1)] + \Lambda, \end{aligned}$$

где  $\Lambda = \frac{d}{dt}PM_1 \tanh(K_1 e_1)$ . Сформировано сигмовидное управление

$$(7) \quad u = -M_2 \tanh(K_2 e_2), \quad e_2 = q_2 + PM_1 \tanh(K_1(h(q_1) - y_r)),$$

где  $M_2, K_2 \in R^{n \times n}$  — диагональные матрицы коэффициентов усиления.

В первом уравнении (6)  $\dot{y}_r$  рассматривается как ограниченное возмущение  $\|\dot{y}_r(t)\| \leq Y_1, t \geq 0$ . Показано, что если при отслеживании  $y_r(t)$  не возникают особые конфигурации, где  $\det B(q_1) = 0$ , то тогда после стабилизации невязки за конечное время

$$(8) \quad \|e_2(t)\| \leq \delta_2, \quad t > t_0 > 0, \quad t_0 < T$$

выбором коэффициентов фиктивного управления (5) на основе неравенств, формализованных в рамках метода иерархии управлений [2], обеспечивается целевое условие (2). Для настройки истинного управления (7) проведен анализ производной квадратичной формы  $V = \frac{1}{2}e_2^T H(q_1)e_2$ , записанной в силу второго уравнения (6):

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_2^T H(q_1)\dot{e}_2 + \frac{1}{2}e_2^T \dot{H}(q_1)e_2 = e_2^T [u - f(q_1, q_2, y_r)] + \\ & + e_2^T \left( \frac{1}{2}\dot{H}(q_1) - C(q_1, q_2) \right) e_2, \quad f = -C(q_1, q_2)q_2^* - G(q_1) + H\Lambda, \end{aligned}$$

где  $e_2^T \left( \frac{1}{2}\dot{H}(q_1) - C(q_1, q_2) \right) e_2 \equiv 0$ . Показано, что при  $\|f(t)\| \leq F, t \geq 0$  требование (8) обеспечивается выбором коэффициентов управления (7) на основе неравенств, составленных для «худшего» случая неопределенных параметров, не требующих точного знания элементов матриц  $H(q_1), C(q_1, q_2), G(q_1)$  и их вычисления в реальном времени.

С учетом  $Y_1$  и ограничений (2) получена оценка минимально возможной ошибки слежения (3) в установившемся режиме.

Таким образом, разработан универсальный метод робастного управления конечной точкой манипулятора без решения обратной задачи кинематики. Он может потребовать составления громоздких оценочных выражений на этапе проектирования, но зато имеет высокую вычислительную эффективность в реальном времени.

### Список литературы

1. *Antipov A.S., Kokunko J.G., Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V.* Direct Control of the Endpoint of the Manipulator Under Non-Smooth Uncertainty and Reference Trajectories // Journal of The Franklin Institute. 2023. V. 360. No. 17. P. 13430–13458.

2. *Antipov A.S., Krasnova S.A., Utkin V.A.* Hyperbolic Tangent as a Smooth Analog of Discontinuous Control in Dynamic Systems With Uncertain Input Matrices // *Advances in Systems Science and Applications*. 2024. V. 24. No. 4. P. 1–29.

## **Direct Control of the End Point Position of a Manipulator with Uncertain Mass-Inertial Characteristics**

*P. P. Greznev, S. A. Krasnova*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia  
greznev@gmail.com, skrasnova@list.ru

For manipulators with an irredundant number of degrees of freedom, a method for synthesizing generalized moments is proposed. These moments ensure that the manipulator's endpoint tracks a given trajectory under conditions of uncertain mass-inertial characteristics. This approach ensures control constraints, eliminates the need to solve an inverse kinematics problem, and reduces computational overhead.

---

УДК 517.977

## **Предельное поведение множеств достижимости с ограничениями на норму управления в пространстве $L_p$**

*М. И. Гусев*

ИММ им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
gmi@imm.uran.ru

В ряде недавних работ изучались свойства траекторий управляемых систем при ограничениях на норму управления в пространстве  $L_p$  ( $p > 1$ ), в частности, зависимость семейств траекторий от параметра  $p$ . В данном докладе для аффинных по управлению систем доказана непрерывность множеств достижимости в хаусдорфовой метрике при  $p \rightarrow 1$  и  $p \rightarrow \infty$ . Для линейных систем получены оценки скорости сходимости.

*Ключевые слова:* Управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, зависимость от параметра

## 1. Введение

В работах [1–3] был исследован вопрос о непрерывной зависимости шаров в пространстве  $L_p$  от  $p > 1$ . В данной работе, опираясь на полученные результаты, мы изучаем предельное поведение множеств достижимости при ограничении на норму управления в пространстве  $L_p$  при  $p \rightarrow 1$  и  $p \rightarrow \infty$ . Отметим, что множество достижимости при  $p = 1$  совпадает (с точностью до замыкания) с множеством достижимости системы с импульсным управлением при ограничении на полную вариацию управления, при  $p = \infty$  — это множество достижимости системы с геометрическим ограничением.

## 2. Основной результат

Рассматриваются множества достижимости управляемых систем на заданном промежутке времени  $[t_0, t_1]$  с управлениями из  $L_p[t_0, t_1]$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ . Ограничения на управления имеют вид  $u(\cdot) \in B_p(\mu)$ , где  $B_p(\mu) = \{u(\cdot) \in L_p : \|u(\cdot)\|_p \leq \mu\}$ ,  $\|u(\cdot)\|_p$  — норма в  $L_p$ ,  $\|u(\cdot)\|_\infty = \text{ess sup}\{\|u(t)\| : t \in [t_0, t_1]\}$ . Управляемая система задана уравнением

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — состояние системы,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  — управление,  $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$  — определены на множестве  $[t_0, t_1] \times D$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклый компакт, начальное состояние  $x_0 \in \text{int}D$  фиксировано. Функции  $f_1(t, x)$  и  $f_2(t, x)$  непрерывны и имеют непрерывные производные по  $x$ , на  $[t_0, t_1] \times D$ . Считаем, что для каждого  $u(\cdot) \in B_1(r\mu)$  ( $r = \max\{1, t_1 - t_0\}$ ) решение системы (1)  $x(t, u(\cdot))$  определено на  $[t_0, t_1]$  и принадлежит множеству  $D$ .

**Определение 1.** Множеством достижимости системы (1) при ограничении  $u(\cdot) \in B_p(\mu)$  называется множество

$$R_p(\mu) = \{x(t_1, u(\cdot)) : u(\cdot) \in B_p(\mu)\}.$$

**Теорема 1.** *Отображение  $p \rightarrow R_p(\mu)$  непрерывно по Хаусдорфу при  $p \in [1, \infty]$ .*

Утверждение теоремы при  $p > 1$  является непосредственным следствием результатов работ [1–3] и непрерывности отображения  $x(t_1, u(\cdot)) : L_1 \mapsto \mathbb{R}^n$ . При  $p = 1$  доказательство теоремы опирается на конечномерность пространства состояний и равномерную ограниченность множеств достижимости.

В случае линейной системы

$$(2) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x^0,$$

получены оценки погрешности аппроксимации при  $p \rightarrow 1$  и при  $p \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Пусть система (2) вполне управляема. Для каждого  $\underline{p} > 1$  существует константа  $C$ , такая что

$$h(R_p(\mu), R_\infty(\mu)) \leq C \frac{1}{p}, \quad \forall p \geq \underline{p} + 3.$$

**Теорема 3.** Пусть система (2) вполне управляема и матричная функция  $B(t)$  липшицева на  $[t_0, t_1]$ . Найдутся  $C > 0$ ,  $\bar{p} > 1$ , такие что

$$h(R_p(\mu), R_1(\mu)) \leq C |\ln(p-1)|(p-1), \quad 1 < p \leq \bar{p}.$$

Доказательство полученных оценок использует представление хаусдорфова расстояния между выпуклыми множествами через их опорные функции.

В докладе также обсуждаются алгоритмы построения множеств достижимости. Для линейной системы алгоритм использует формулы для вычисления опорных векторов на границе  $R_p$ . В нелинейном случае применяется принцип максимума Понтрягина для граничных траекторий. Результаты проведенных численных экспериментов согласуются с полученными в теоремах 2, 3 теоретическими оценками. Отметим, что при  $p \rightarrow 1$  помимо более медленной сходимости алгоритмов возникают значительные вычислительные погрешности, которые в случае линейных систем могут быть уменьшены с помощью использования специальных процедур интегрирования.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-11-00269), <https://rscf.ru/project/25-11-00269/>.

### Список литературы

1. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The Approximation of Reachable Sets of Control Systems With Integral Constraint on Controls // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2007. V. 14. No. 1–2. P. 57–73.
2. Huseyin A., Huseyin N., Guseinov K.G. Continuity of  $L_p$  Balls and an Application to Input-Output Systems // Math. Notes. 2022. V. 111. No. 1. P. 58–70.
3. Huseyin A. On the Vietoris Semicontinuity Property of the  $L_p$  Balls at  $P = 1$  and an Application // Arch. Math. 2023. V. 121. No. 2. P. 171–182.

4. *Gusev M.I.* On Some Properties of Reachable Sets for Nonlinear Systems With Control Constraints in  $L_p$  // Proc. Steklov Inst. Math. 2024. V. 327. Suppl. 1. P. 124–137.
5. *Gusev M.I.* Asymptotic Behavior of Reachable Sets With  $L_p$ -Bounded Controls // Ural Math. J. 2025. V. 11. No. 2. P. 128–143.

**Limit Behavior of Reachable Sets Under Control–Norm  
Constraints in the Space  $L_p$**

*M. I. Gusev*

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg,  
Russia  
gmi@imm.uran.ru

Recent studies have investigated the properties of trajectories in controlled systems subject to control-norm constraints in the space  $L_p$  ( $p > 1$ ), and in particular, examined the dependence of families of trajectories on the parameter  $p$ . In this talk, for systems affine in control, we prove the continuity of reachability sets in the Hausdorff metric as  $p \rightarrow 1$  and  $p \rightarrow \infty$ . For linear systems, we obtain estimates of the convergence rate.

---

## **Исследование устойчивости периодических колебаний системы двух тел в плоскости эллиптической орбиты**

*С. А. Гутник*

МГИМО МИД России, Москва, Россия

МФТИ (НИУ), Долгопрудный, Россия

s.gutnik@inno.mgimo.ru

В работе приводятся результаты исследования плоских периодических колебаний системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, которая движется по эллиптической орбите в гравитационном поле Земли. Периодические решения дифференциальных уравнений движения строятся в форме степенных рядов по малому параметру с использованием методов теории возмущений. В рамках предложенного подхода было показано, что движение системы двух тел в плоскости слабо эллиптической орбиты определяются в форме периодических колебаний. Проведено исследование устойчивости в линейном приближении динамического положения равновесия системы.

*Ключевые слова:* система двух тел, сферический шарнир, гравитационный момент, эллиптическая орбита, уравнения Лагранжа, степенные ряды, периодические решения, устойчивость

### **1. Введение**

В работе представлены результаты исследования динамики системы двух тел (спутник–стабилизатор), соединенных сферическим шарниром, движущейся по эллиптической орбите в центральном гравитационном поле в плоскости орбиты. Подробное рассмотрение динамики различных типов составных схем спутник–стабилизатор и гравитационных систем ориентации представлено в [1, 2]. Детальное исследование колебаний спутника (твердого тела) в плоскости эллиптической орбиты и условий их устойчивости проведено в работе [3]. Исследования плоских колебаний системы двух связанных тел на эллиптической орбите, проводились лишь для простых случаев, когда центры масс первого и второго тел совпадают [4, 5].

В данной работе рассматриваются плоские колебания системы двух тел на эллиптической орбите в случае, когда сферический шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции первого и второго тела. Методами символьных вычислений с помощью систем компьютерной алгебры удается построить периодическое решение задачи в виде степенного ряда по малому параметру и провести анализ

устойчивости динамического положения равновесия в линейном приближении путем вычисления матрицы монодромии и ее собственных значений.

## 2. Уравнения движения, периодические решения

Уравнения движения системы двух тел, соединенных сферическим шарниром, в плоскости эллиптической орбиты относительно центра масс в орбитальной системе координат  $OXYZ$ , ось  $OZ$  которой направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центр масс Земли и центр масс системы двух тел, ось  $OX$  направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс, ось  $OY$  совпадает с нормалью к плоскости орбиты, имеют следующий вид:

(1)

$$\begin{aligned}
 & - (1 + e \cos \vartheta) \alpha_2'' + 2e \alpha_2' \sin \vartheta + \frac{B_1 + M a_1^2}{M a_1 a_2} ((1 + e \cos \vartheta) \alpha_1'' - 2e \alpha_1' \sin \vartheta) \\
 & - e(1 + e \cos \vartheta) (\alpha_2' + 1)^2 + 2e \sin \vartheta \left( 1 - \frac{B_1 + M a_1^2}{M a_1 a_2} \right) + 4e \\
 & + \frac{3e(A_1 - C_1 - M a_1^2)}{M a_1 a_2} = 0, \\
 & - (1 + e \cos \vartheta) \alpha_1'' + 2e \alpha_1' \sin \vartheta + \frac{B_2 + M a_2^2}{M a_1 a_2} ((1 + e \cos \vartheta) \alpha_2'' - 2e \alpha_2' \sin \vartheta) \\
 & + e(1 + e \cos \vartheta) (\alpha_1' + 1)^2 + 2e \sin \vartheta \left( 1 - \frac{B_2 + M a_2^2}{M a_1 a_2} \right) + 2e \\
 & + \frac{3e(A_2 - C_2 - M a_2^2)}{M a_1 a_2} = 0.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2$  — самолетные углы тангажа ориентации оси инерции первого и второго тела относительно орбитальной системы координат,  $\vartheta$  — истинная аномалия и  $e$  эксцентриситет орбиты [1]. Символ штрих в (1) означает дифференцирование по переменной  $\vartheta$ .  $A_i, B_i, C_i$  — главные центральные моменты инерции тел;  $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ ;  $M_i$  — масса  $i$ -го тела. Рассматривается случай, когда шарнир расположен на пересечении главных центральных осей инерции спутника и стабилизатора, тогда координаты сферического шарнира в связанных с каждым телом системе координат будут иметь значения  $a_1, a_2$ .

На эллиптической орбите нулевого положения равновесия  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  системы не существует из-за неравномерности вращения радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и системы двух

тел. Это положение равновесия, которое имеет место на круговой орбите, переходит в периодические эксцентриситетные колебания в плоскости орбиты. Эксцентриситетные колебания представляют собой частное периодическое решение системы уравнений (1). Системе (1) удовлетворяет нулевое стационарное  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Общего аналитического решения нелинейной системы (1) не существует. Для поиска решений системы (1) будем использовать методы теории возмущений и алгоритмы символьных вычислений степенных рядов, предложенные в работах [6] и [7]. Периодическое решение, определяющее эксцентриситетные колебания системы двух соединенных тел, представлялось в виде разложения в ряд по степеням малого параметра до квадратичного члена  $e$  ( $e \ll 1$ ):

$$\alpha_i(\vartheta) = e\alpha_i^{(1)}(\vartheta) + e^2\alpha_i^{(2)}(\vartheta) + \dots$$

### 3. Анализ устойчивости

Анализ устойчивости динамического положения равновесия проводился по следующей схеме. С использованием выражения для кинетической энергии и силовой функции и выполняя преобразование Лежандра был определен гамильтониан  $H$ . Для исследования устойчивости периодических решений определялись новые канонические переменные  $p_i, q_i$ . Перепишем гамильтониан  $H$  в новых канонических переменных и разложим его в степенной ряд по  $p_i, q_i$  до второго порядка включительно  $H = H_0 + H_1 + H_2$ , где  $H_k$  — однородный многочлен  $k$ -го порядка относительно канонических переменных  $p_i, q_i$ , которые рассматриваются как малые возмущения периодического решения. В результате получим значение квадратичной части  $H_2$  гамильтониана, которая определяет линеаризованные дифференциальные уравнения возмущенного движения с периодическими коэффициентами. Возмущенное движение системы описывается линейной системой четырех дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Вычисляя матрицу монодромии и проведя анализ ее собственных значений, получим согласно теории Ляпунова условия устойчивости периодических решений в линейном приближении.

### 4. Заключение

В настоящей работе были построены периодические решения уравнений движения системы двух тел, связанных сферическим шарниром, которая движется по слабо эллиптической орбите и рассмотрены условия устойчивости динамического положения равновесия системы в линейном приближении.

### Список литературы

1. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства» Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978.
2. *Rauschenbakh B.V. Ovchinnikov M.Yu., McKenna-Lawlor S.* Essential Spaceflight Dynamics and Magnetospherics. Kluwer Academic Publishers, 2003.
3. *Zlatoustov V.A., Markeev A.P.* Stability of Planar Oscillations of a Satellite in an Elliptic Orbit // *Celestial Mechanics*. 1973. V. 7. No. 1. P. 31–45.
4. *Пеньков В.И.* Компенсация эксцентриситетных колебаний спутника с гравитационной системой стабилизации // *Космические исследования*. 1999. Т. 15. № 3. С. 376–383.
5. *Clark J.P.C.* Response of a Two-Body Gravity Gradient System in a Slightly Eccentric Orbit // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1970. V. 7. No. 3. P. 294–298.
6. *Prokopenya A.N.* Symbolic Computation in Studying Stability of Solutions of Linear Differential Equations With Periodic Coefficients // *Programming and Computer Software*. 2007. V. 33. No. 2. P. 60–66.
7. *Prokopenya A.N.* Construction of a Periodic Solution to the Equations of Motions of Generalized Atwood's Machine Using Computer Algebra // *Programming and Computer Software*. 2020. V. 46. No. 2. P. 120–125.

### Study of the Stability of Periodic Oscillations of a Two-Body System in the Plane of an Elliptical Orbit

*S. A. Gutnik*

MGIMO University, Moscow, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia  
s.gutnik@inno.mgimo.ru

This paper presents the results of a study of planar periodic oscillations of a system of two bodies connected by a spherical hinge, moving in an elliptical orbit in Earth gravitational field. Using perturbation theory methods, periodic solutions of the differential equations of motion are constructed in the form of power series in a small parameter. Using the proposed approach, it was shown that the motion of the two-body system in the plane of a weakly elliptical orbit is determined by periodic oscillations. A stability study of the dynamic equilibrium of a system was conducted in the linear approximation.

---

## Алгоритм управления нелинейными объектами с запаздыванием на базе предикторов регулируемой величины и возмущения

*Т. Д. Данг, И. Б. Фуртат*

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия,  
ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия  
dangtd93@gmail.com, cainenash@mail.ru

Предлагается алгоритм управления нелинейными объектами с запаздыванием в условиях возмущения. Алгоритм состоит из предиктора регулируемой величины и предиктора возмущения. С использованием метода функционалов Ляпунова–Красовского и S-процедуры получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств.

*Ключевые слова:* нелинейные системы, запаздывание, субпредиктор, линейные матричные неравенства, S-процедура

### 1. Введение

На практике широко распространены задачи управления процессами с запаздыванием в канале управления. Для устойчивых линейных объектов с запаздыванием в [1] впервые был предложен предиктор Смита для прогноза регулируемой величины на время запаздывания. Позже А. Манитиус и А. Олброт в работе [2] предложили метод управления на основе пропорционально-интегрального предиктора для неустойчивых линейных систем, который построен на базе решения уравнения объекта. В [3, 4] было показано, что численная реализация предиктора [2] может стабилизировать только определенный класс неустойчивых объектов с запаздыванием. В [5] предложен новый предиктор для неустойчивых объектов. По сравнению с [2] схема прогноза [5] не содержит интегральной составляющей, поэтому техническая реализация и расчет параметров в [5] проще, чем в [2]. В [6, 7] результаты [5] обобщены на объекты с большим временем запаздывания путем использования субпредиктора, осуществляющего многошаговое прогнозирование. Однако работы [5–7] применимы только для линейных систем. В настоящей работе предложено обобщить результаты работы [6, 7] на объекты с секторной нелинейностью.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейный объект с запаздыванием в канале управления, который описывается уравнением

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + F\phi(x(t)) + Bu(t-h), \\ x(0) &= x_0, t \geq 0, \quad u(s) = 0, \quad s < 0, \end{aligned}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — измеряемый вектор состояния,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  — управляющий сигнал,  $\phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — известная нелинейная функция, для которой существует коэффициент  $L > 0$  такой, что для любых  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  выполнено условие  $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ ,  $h > 0$  — известное время запаздывания. При этом матрицы  $A, B, F$  имеют соответствующие размеры и известны, причем пара  $(A, B)$  является управляемой.

Целью работы является разработка алгоритма управления, обеспечивающего выполнение заданного целевого условия

$$(2) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |e(t)| \leq \delta,$$

где  $\delta = O\left(h^{(r+1)} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |\varphi^{(r+1)}(t)|\right)$ .

## 3. Основной результат

Закон управления системы имеет вид:

$$(3) \quad u(t) = u_1(t) + u_2(t).$$

Чтобы сформировать закон управления  $u_1(t)$ , потребуется прогноз вектора состояния модели ошибки на время запаздывания  $h$ , т.е.  $x(t+h)$ . Для этого введем предиктор регулируемой величины

$$(4) \quad \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + F\phi(\bar{x}(t)) + D(x(t) - \bar{x}(t-h)) + Bu_1(t),$$

где матрица  $D$  выбираются для обеспечения ограниченности решений уравнения  $\dot{\omega}(t) = A\omega(t) - D\omega(t-h)$ .

Управляющий сигнал  $u_1(t)$ , обеспечивающий устойчивость замкнутой системы, определяется следующим образом:

$$(5) \quad u_1(t) = -K\bar{x}(t),$$

где матрица  $K$  выбирается из условия гурвицевости матрицы  $A - BK$ .

Для отделения возмущения от ошибки прогнозирования предлагаем вспомогательный контур:

$$(6) \quad \dot{e}_a(t) = Ae_a(t) - De_a(t-h) + F[\phi(x(t)) - \phi(\bar{x}(t-h))] + Bu_2(t-h).$$

Теперь определяем оценку возмущения с помощью выражения

$$(7) \quad \hat{\varphi}(t) = B^+ \left( \hat{\zeta}(t) - A\zeta(t) + D\zeta(t-h) \right),$$

где  $\hat{\zeta}_i(t) = \frac{p}{\mu p + 1} \zeta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  — наблюдатель производных.

Для прогнозирования возмущения  $\hat{\varphi}(t)$  используется теорема Лагранжа, как в работе [6, 7], то есть предиктор возмущения:

$$(8) \quad \tilde{\varphi}(t+h) = \sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{\varphi}(t-h(j-1)).$$

Тогда закон управления  $u_2(t)$  имеет следующий вид:

$$(9) \quad u_2(t) = -\tilde{\varphi}(t+h).$$

Для исследования устойчивости замкнутой системы используются метод функционалов Ляпунова–Красовского и S-процедура, позволяющие получить достаточные условия устойчивости в виде разрешимости линейных матричных неравенств (ЛМН).

**Теорема 1.** *Рассмотрим систему управления для исследования устойчивости замкнутой системы. Пусть для заданного числа  $\alpha > 0$  и матриц  $K, D$  существуют коэффициент  $\beta > 0$  и положительно определенные матрицы  $P, Q, S$ , а также матрицы  $P_2, P_3$  такие, что следующая ЛМН имеет решение*

$$(10) \quad \Psi := \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & 0 & -hP_2^T D_p & P_2^T B_p \\ * & -P_3 - P_3^T + hS & 0 & -hP_3^T D_p & P_3^T B_p \\ * & * & -e^{-2\alpha h} Q & 0 & 0 \\ * & * & * & -hS & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0,$$

где  $\Psi_{11} = P_2^T (A_p + D_p) + (A_p + D_p)^T P_2 + 2\alpha P + Q + \beta L^2 I$ ,  $\Psi_{12} = P - P_2^T + (A_p + D_p)^T P_3$ . Тогда решения замкнутой системы предельно ограничены. Также будет выполнено условие цели  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq \delta$ .

*Дополнительно: все сигналы ограничены в замкнутой системе.*

#### 4. Заключение

Синтезирован алгоритм управления нелинейными системами с запаздыванием в условиях возмущения. Алгоритм основан на использовании предикторов регулируемой величины и возмущения. Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств. Эффективность алгоритма продемонстрирована результатами моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-19-20075, <https://rscf.ru/project/25-19-20075/>) в ИПМаш РАН.

#### Список литературы

1. *Smith J.M.* Closer Control of Loops with Dead Time // Chem. Eng. Prog. 1959. No. 53. P. 2217–2219.
2. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. AC-24. No. 4. P. 541–553.
3. *Van Assche V., Dambrine M., Lafay J.F., Richard J.P.* Some Problems Arising in the Implementation of Distributed-Delay Control Laws // Proc. 38th IEEE Conf. On Decision and Control. Phoenix, 1999.
4. *Mondie S., Michiels W.* Finite Spectrum Assignment of Unstable Time-Delay Systems With a Safe Implementation // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212.
5. *Kristic M.* Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems. Birkhauser, 2009.
6. *Фуртат И.Б., Гушчин П.А.* Алгоритм управления объектами с запаздывающим входным сигналом на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // Автоматика и телемеханика. 2019. № 2. С. 3–23.
7. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Tracking Control Algorithms for Plants With Input Time-Delays Based on State and Disturbance Predictors and Sub-Predictors // Journal of the Franklin Institute. 2019. V. 356. P. 4496–4512.

#### A Control Algorithm for an Nonlinear Objects with Delayed Based on Predictors of the Controlled Variable and Disturbance

*The Dong Dang, I. B. Furtat*

ITMO University, St. Petersburg, Russia

Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences,

St. Petersburg, Russia

dangtd93@gmail.com, cainenash@mail.ru

An algorithm for controlling nonlinear objects with delay in the input signal is proposed. The algorithm consists of a predictors of the controlled

variable and disturbance. Using the Lyapunov–Krasovskii functional method and the S-procedure, sufficient conditions for the stability of the closed-loop system are obtained in the form of the feasibility of linear matrix inequalities.

---

УДК 517.977.1

## Построение управления на основе алгоритма обучения с подкреплением для перевернутого маятника

*Д. Д. Девяткин, Е. Д. Девяткина*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
devyatkin@bmstu.ru, devyatkined@student.bmstu.ru

В данной работе рассматривается метод управления на основе независимого Q-обучения, не требующий предварительной идентификации модели или точного знания параметров системы, так как обучение происходит на основе измеренных данных. В работе проводится синтез стабилизирующего управления для системы перевернутого маятника, подтверждающий эффективность метода.

*Ключевые слова:* обучаемое управление, линейные системы, Q-обучение, обучение с подкреплением

### 1. Введение

Разработка точных математических моделей осложняется нелинейностью систем, упрощение которых может привести к неустойчивости замкнутых управлением систем даже при малых отклонениях от положения равновесия. Методы управления, основанные на данных, приобретают популярность, адаптируясь к неопределенностям путем синтеза законов управления непосредственно из наблюдаемого поведения системы [1]. В данной статье под данными понимаются измеренные значения состояния системы и входных управляющих воздействий. В работе рассматриваются основные теоретические аспекты алгоритма Q-обучения, а также практическая реализация.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную линейную систему вида:

$$(1) \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — матрицы системы. В алгоритме Q-обучения происходит решение задачи дискретного LQR-управления без знания параметров системы [2].

Задача управления LQR формулируется путем определения вклада входного сигнала  $u_k$  и состояния  $x_k$  в функцию стоимости на бесконечном горизонте следующим образом:

$$(2) \quad J(x, u) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k,$$

где  $Q = Q^T$ ,  $R = R^T$  — положительно определенные матрицы. Целью Q-обучения является вычисление  $\{u_k\}_{k=0}^{N-1}$ , которая минимизирует функционал (2). Закон управления ищется в форме  $u_k = -Kx_k$ .

### 3. Основной результат

Определим Q-функцию как значение функционала для произвольного управления  $u_k$  в момент времени  $k$  и  $u_t = -Kx_t$ , начиная с момента времени  $t = k + 1$ :

$$(3) \quad \mathbb{Q}^K(x_k, u_k) = x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + V^K(x_{k+1}).$$

Заметим, что для линейных систем вида (1) функция стоимости  $V^K$  может быть выражена следующим образом:

$$(4) \quad V^K(x_k) = x_k^T P^K x_k,$$

где  $P^K \succ 0$  — решение уравнения Ляпунова [3]. Используем равенство

$$(5) \quad \mathbb{Q}^K(x_k, -Kx_k) \triangleq V^K(x_k).$$

Объединив (2), (3), (4), (5) получим:

$$(6) \quad z_k^T \Theta^K z_k = z_k^T \bar{Q} z_k + \zeta_{k+1}^T \Theta^K \zeta_{k+1},$$

где

$$z_k = [x_k^T, u_k^T]^T, \quad \bar{Q} = \text{diag}(Q, R), \quad \zeta_{k+1} = [x_{k+1}^T, u_{k+1}^T]^T,$$

Управление определяется минимизацией Q-функции:

$$u_k^* = \arg \min \mathbb{Q}^K(x_k, u_k) \Rightarrow u_k^* = -\Theta_{22}^{-1} \Theta_{12} x_k.$$

Для поиска матрицы  $\Theta^K$ , необходимо решить систему уравнений (6). Поиск будет происходить итеративно: находим  $\Theta^K$ , далее  $u_k$ , снова  $\Theta^K$  и так до сходимости. Расчет начинается со случайного значения.

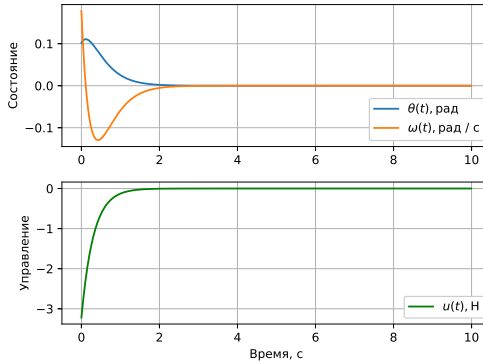


Рис. 1: Стабилизация системы перевернутого маятника.

#### 4. Численное моделирование

Для моделирования рассмотрим систему перевернутого маятника:

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega, \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin(\theta) + \frac{1}{ml^2} u, \end{cases}$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $l$  — длина маятника,  $m$  — масса маятника,  $u$  — управление,  $\theta$  — угол отклонения. Пусть угол отклонения маятника  $\theta$  мал. Тогда для линеаризации системы (7) рассмотрим разложение  $\sin(\theta)$  в ряд Тейлора вблизи неустойчивого положения равновесия:

$$(8) \quad \sin(\theta + \pi) = -\theta + \frac{\theta^3}{3!} - o(\theta^5) \approx -\theta.$$

Далее построим стабилизирующее управление для линейной системы перевернутого маятника. На рис. 1 продемонстрирована стабилизация системы в верхнем положении равновесия.

#### Список литературы

1. *Berberich J., Romer A., Scherer C., Allgower F.* Robust Data Driven State Feedback Design // Proc. American Control Conference, 2020. P. 1532–1538.
2. *Lopez V., Alsalti M., Müller M.* Efficient Off-Policy Q-Learning for Data-Based Discrete-Time LQR Problem // IEEE Transactions on Automatic Control. 2023. V. 68. No. 5. P. 2922–2933.
3. *Parks P.C. A. M.* Lyapunov’s Stability Theory — 100 Years on // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 1992. Vol. 9. No. 4. P. 275–303.

# Designing a control system based on a reinforcement learning algorithm for an inverted pendulum

*D. D. Devyatkin, E. D. Devyatkin*

Bauman Moscow State Technical University, Russia  
devyatkin@bmstu.ru, devyatkined@student.bmstu.ru

This paper research an off-policy Q-learning control method, which does not require prior model identification or precise knowledge of the system's parameters, as learning occurs based on measured data. The paper also synthesizes a stabilizing control for an inverted pendulum system, confirming the method's effectiveness.

---

УДК 517.97.7

## Оптимизация управления манипулятора с кинематической избыточностью

*Ю. Ф. Долгий, А. Н. Сесекин*

УрФУ, Екатеринбург, Россия  
ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
jury.dolgy@urfu.ru, a.n.sesekin@urfu.ru

Для манипулятора с кинематической избыточностью решается задача по перемещению груза из начального положения равновесия в конечное. Импульсные управления используются для приводов робота. Метод декомпозиции динамической системы опирается на процедуру замораживания связей. При оптимизации применяются вариации движений манипулятора, связанные с избыточностью кинематических связей.

*Ключевые слова:* оптимизация управлений, манипуляционные роботы

### 1. Введение

Рассмотрим манипуляционный робот с  $n$  степенями свободы. Все его звенья и груз считаем абсолютно твердыми телами. Обобщенные координаты  $q_1, \dots, q_n$  однозначно определяют конструкцию манипулятора и положение груза. Вектор обобщенных координат  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^\top$  принадлежит множеству кинематически допустимых конфигураций  $D$  области пространства  $\mathbb{R}^n$ . Положение и ориентацию гру-

за в рабочей зоне задаем вектором  $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_m)^\top$ ,  $m \leq 6$ . Кинематическая избыточность обусловлена выполнением условия  $m < n$ . Полагаем, что конкретная кинематическая схема манипулятора определяет известные непрерывно дифференцируемые функции

$$(1) \quad \tilde{q}_j = f_j(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in D, \quad j = \overline{1, m}, \quad m < n.$$

Управляющие воздействия генерируются приводами по каждой обобщенной координате отдельно.

Требуется найти программные управления  $\tilde{u}_i(t)$ ,  $t \in [0, \tilde{\tau}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , переводящие груз из заданного начального положения равновесия  $\tilde{\mathbf{q}}(0) = \tilde{\mathbf{q}}^0$  в заданное конечное положение равновесия  $\tilde{\mathbf{q}}(\tilde{\tau}) = \tilde{\mathbf{q}}^\tau$ , а также время  $\tilde{\tau}$  такого перевода.

При решении поставленной задачи используется метод декомпозиции [2, 3, 3]. Он позволяет общую задачу управления заменить серией простых задач управления для отдельных обобщенных координат. В своих исследованиях Е.С. Пятницкий, Ф.Л. Черноусько, С.А. Решмин использовали релейные управления, а в настоящей работе применяются их импульсные управления.

## 2. Основной результат

Для описания динамики манипуляционного робота используются уравнения Лагранжа. Рассмотрим вспомогательную задачу нахождения программных управлений  $u_i(t)$ ,  $t \in [0, \tau]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , переводящих манипулятор из заданного начального положения равновесия  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0$  в заданное конечное положение равновесия  $\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q}^\tau$ , а также время  $\tau$  такого перевода. Согласно методу декомпозиции [3], для отрезка  $[0, \tau]$  задается разбиение точками множества  $\Delta = \{\tau_k \in \mathbb{R} : \tau_{k-1} < \tau_k, k = \overline{1, n}, \tau_0 = 0, \tau_n = \tau\}$ . Общая вспомогательная задача управления манипулятором заменяется серией простых задач управления на интервалах движения  $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Координатные функции движения простой задачи удовлетворяют условиям:  $q_k(\cdot)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция,  $q_k(0) = q_k^0$ ,  $q_k(\tau) = q_k^\tau$ ,  $q_i(t) = q_i(\tau)$  при  $1 \leq i < k$ ,  $q_i(t) = q_i(0)$  при  $k < i \leq n$ ,  $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Находятся импульсные управления

$$(2) \quad \begin{aligned} u_k(t, \mathbf{q}^\tau, \vartheta) &= S_k^0(\mathbf{q}^\tau, \vartheta) \delta(t - \tau_{k-1}) \\ &+ S_k^\tau(\mathbf{q}^\tau, \vartheta) \delta(t - \tau_k), \quad \mathbf{q}^\tau \in D, \quad \vartheta \in \Delta, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

которые обеспечивают в начальный момент  $t = \tau_{k-1}$  переход манипулятора из положения равновесия  $q_k(0) = q_k^0$  на траекторию прямого

пути, а в конечный момент  $t = \tau_k$  торможение манипулятора в конечном положении равновесия  $q_k(\tau) = q_k^\tau$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Здесь  $\delta(\cdot)$  — функция Дирака,  $\vartheta = (\tau_1, \dots, \tau_n)^\top$ . Требуется существование единственного решения  $q_k(t, \mathbf{q}^\tau, \vartheta)$ ,  $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$  краевой задачи для специального дифференциального уравнения

$$\ddot{q}_k + b_k(q_k, \dot{q}_k) = 0, q_k(0) = q_k^0, q_k(\tau) = q_k^\tau, k = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим импульсные управления с заданным ограничением их совокупной энергии  $E(\mathbf{q}^\tau, \vartheta) \leq \nu$ . Если условная минимизация времени поворота манипулятора  $\tau$  реализуется при значении векторного параметра  $\vartheta = \vartheta^0(\mathbf{q}^\tau)$ ,  $\mathbf{q}^\tau \in D$ , то единственное субоптимальное программное управление вспомогательной задачи на отрезке  $[0, \tau^0(\mathbf{q}^\tau)]$ , где  $\tau^0(\mathbf{q}^\tau) = \vartheta_n^0(\mathbf{q}^\tau)$ , определяется, с учетом формулы (2),  $u^0(t, \mathbf{q}^\tau) = u(t, \mathbf{q}^\tau, \vartheta^0(\mathbf{q}^\tau))$ ,  $\mathbf{q}^\tau \in D$ ,  $t \in [0, \tau^0(\mathbf{q}^\tau)]$ .

Переходим к завершающей оптимизации, связанной с минимизацией функции  $\tau^0(\mathbf{q}^\tau)$ , при заданных ограничениях, определяемых векторной функцией (1)  $f(\mathbf{q}^\tau) = \tilde{q}^\tau$ ,  $\mathbf{q}^\tau \in D$ . Если она имеет единственное решение, то это решение определяет оптимизирующий векторный параметр  $\mathbf{q}^{\tau^0}$  и оптимальное время  $\tilde{\tau}^0 = \tau^0(\mathbf{q}^{\tau^0})$ , а также единственное субоптимальное программное управление исходной задачи транспортировки груза  $\tilde{u}^0(t) = u^0(t, \mathbf{q}^{\tau^0})$ ,  $t \in [0, \tilde{\tau}^0]$ .

Предложенный алгоритм управления реализован для плоского трехзвеного манипулятора с цилиндрическими шарнирами и электро-механическими приводами.

### 3. Заключение

При переходе от обобщенных импульсных управлений к реальным можно использовать известные аппроксимации функции Дирака.

#### Список литературы

1. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады АН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 300–303.
2. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.
3. *Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.* Метод декомпозиции при нахождении субоптимальных импульсных управлений электрических приводов манипуляционных роботов // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2025. Т. 54. С. 3–17.

# Optimisation of Manipulator Control with Kinematic Redundancy

*Yu. F. Dolgii, A. N. Seseikin*

Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia  
IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia  
jury.dolgy@urfu.ru, a.n.seseikin@urfu.ru

The task of moving a load from its initial equilibrium position to the final position is being solved for a manipulator with kinematic redundancy. Impulse control is used for robot drives. The method of decomposing a dynamic system is based on the procedure of freezing the connections. During optimisation, variations in manipulator movements are applied, caused by the redundancy of kinematic links.

---

УДК 531.133.3

## Моделирование динамики управляемого токоприемного устройства электроподвижного состава железной дороги

*С. В. Дорофеев, Е. А. Сухов*

МАИ, Москва, Россия  
s.dorofeev00@yandex.ru, sukhov.george@gmail.com

Рассматривается механическое взаимодействие токоприемника подвижного состава с контактной подвеской электрифицированной железной дороги. Токоприемник и контактная подвеска моделируются системой твердых тел и упругих балок. Предполагается, что в системе присутствует сервосвязь, обеспечивающая нормированную величину нажатия полоза токоприемника на контактный провод.

*Ключевые слова:* токоприемник, контактная подвеска, системы многих тел, неудерживающие связи, сервосвязи.

### 1. Введение

Важным направлением развития железнодорожного транспорта в настоящее время является организация скоростного движения. Для таких перевозок используется электроподвижной состав, цепь питания которого включает в себя скользящий контакт между токоприемниками и подвешенным над путями контактными проводом. От качества

данного контакта существенно зависит как ресурс токоприемника и контактного провода, так и безопасность движения. Качество контакта определяется силой нажатия токоприемника на контактный провод [1]. При высоких скоростях движения поддержание нажатия в заданных пределах особенно важно, в связи с чем актуальна задача разработки математических моделей взаимодействия токоприемника и контактного провода, в том числе с управлением нажатием по обратной связи. В данной работе такая модель построена для токоприемника-полупантографа, используемого на ряде отечественных скоростных электропоездов, в частности, рассмотрен его перспективный управляемый вариант.

## 2. Описание модели

Рассматривается пространственная механическая система, состоящая из твердых тел: кузова электропоезда, звеньев токоприемника, а также из контактной подвески, моделируемой балками Эйлера-Бернулли (рис. 1). Для описания движения введена неподвижная си-

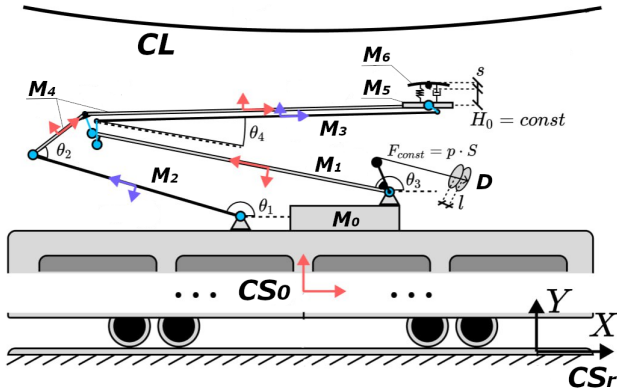


Рис. 1: Кинематическая схема системы:  $M_0$  — кузов,  $M_1$  и  $M_4$  — нижняя и верхняя рамы,  $M_2$  и  $M_3$  — тяги,  $M_5$  — каретка,  $M_6$  — полз,  $D$  — привод нижней рамы,  $CL$  — контактный провод,  $\theta_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ),  $l$ ,  $s$  — шарнирные координаты токоприемника.

стема координат  $CS_r$ , связанная с рельсовым путем, а также подвижная система координат  $CS_0$ , связанная с кузовом, при чем кузов движется относительно пути по заданному закону.

Уравнения движения звеньев токоприемника выводились в шарнирных координатах в форме уравнений Лагранжа II рода с неопределенными множителями, а также в форме уравнений Удвядии-Калабы [2]. Второй метод вывода реализован в виде автоматического алгоритма, допускающего построение уравнений движения для любой кинематической схемы, задаваемой через программный интерфейс. Движение контактной подвески описывается при помощи конечно-разностной схемы, описанной, например, в [3, 4]. Схема контактной подвески может задаваться через программный интерфейс. Алгоритм интегрирования уравнений динамики предусматривает обработку неудерживающей связи (касание и отскок полоза).

### 3. Верификация

Для верификации построенной модели были рассмотрены некоторые характерные режимы работы токоприемника типа ЛА-19. На рис. 2 приведены результаты моделирования одного из таких режимов — подъема токоприемника из сложного состояния до касания контактного провода. Результирующее статическое нажатие соответ-



Рис. 2: Изменение нажатия при подъеме токоприемника и касании контактного провода.

ствует требованию [1], а также значениям, полученным при натуральных измерениях.

Также был рассмотрен вариант токоприемника ЛА-19 с сервоприводом. Был построен алгоритм управления токоприемником, обеспечивающий в процессе движения нажатие на контактный провод в пределах значений, предписываемых [1].

### Список литературы

1. *ГОСТ 32793-2014*. Токосъем токоприемником железнодорожного электроподвижного состава. Номенклатура показателей качества и методы их определения. М.: Стандартинформ, 2015.

2. *Udwadia F. E., Kalaba R. E.* A New Perspective on Constrained Motion // Proc. R. Soc. Lond. 1992. Vol. 439. P. 407–410.
3. *Wang Y. et. al.* Dynamic Characteristics Analysis of Double Pantograph Catenary of AC Rigid Catenary System // IEEE Access. 2023. Vol. 11. P. 70396–70407.
4. *Poetsch G. et. al.* Pantograph/Catenary Dynamics and Control // Vehicle System Dynamics. 1997. Vol. 28. P. 159–195.

## **Dynamical Modelling of Railway Pantograph With Adaptive Control**

*S. V. Dorofeev, E. A. Sukhov*

Moscow Aviation Institute, Russia  
s.dorofeev00@yandex.ru, sukhov.george@gmail.com

In this paper, we model mechanical interaction between the pantograph current-collecting unit and the overhead contact line. The pantograph is modelled with rigid bodies while the line is modelled with elastic beams. We also consider a pantograph with feedback control used to maintain desired pressure on the contact wire.

---

УДК 531.36

## **Оценка внутренних моментов при управлении вибро роботом с дебалансом и маховиком**

*М. З. Досаев*

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
dosayev@imec.msu.ru

В задаче о плоском движении вибрационного робота с дебалансом и маховиком по шероховатой плоскости рассмотрен вариант алгоритма управления, обеспечивающий безреверсное поступательное движение корпуса. Управление задается угловыми ускорениями дебаланса и маховика. Дана оценка моментов двигателей необходимых для реализации управляющих ускорений.

*Ключевые слова:* вибро робот, управление, внутренний момент

## 1. Введение

Работа посвящена актуальной задаче разработки роботов, способных функционировать в условиях агрессивной внешней среды. В [1, 3] был предложен робот, с внутренними вращающимися элементами, движение которого по шероховатой плоскости осуществлялось за счет управления угловыми ускорениями этими элементами. Предложена стратегия с контролируемым чередованием фаз опоры и скольжения без трения. В данной работе рассматривается стратегия управления выхода системы на циклические этапы безреверсного движения с учетом ограничений на угловые ускорения вращающихся элементов. Получена оценка моментов двигателей, необходимых для реализации управляющих ускорений.

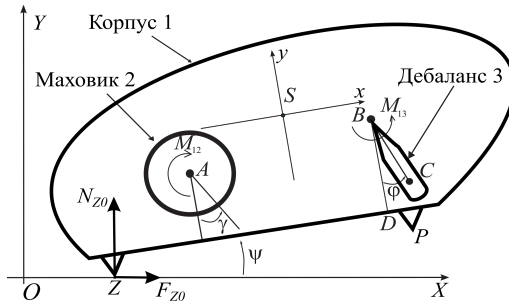


Рис. 1: Эскиз механической системы.

## 2. Основной результат

Рассмотрено плоско-параллельное движение вибрационного робота с дебалансом и маховиком, опирающегося двумя точками на шероховатую горизонтальную плоскость. С корпусом робота связана подвижная система координат  $Sxy$ , где  $S$  – центр масс корпуса. Управлением угловым ускорением маховика достигается сохранение корпусом робота горизонтальной ориентации. Управлением угловым ускорением дебаланса регулируются нормальные реакции в точках опоры. При этом управление приводит к чередованию двух фаз состояния системы: опорной фазы (нормальные реакции в опорах положительны) и безопорной фазы (нормальные реакции равны нулю). Выпишем безразмерные уравнения поступательного движения системы:

$$\begin{aligned}
& -Lx_S'' = F_{Z_0} + F_{P_0} - \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^2 \sin \varphi \\
& -Ly_S'' = L - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + N_{Z_0} + N_{P_0} \\
(1) \quad & J_{20}\gamma'' = x_S''(y_{B_0} - \cos \varphi + y_{A_0}m_{20}) - \\
& -\varphi''(1 + J_{30} - y_{B_0} \cos \varphi + x_{B_0} \sin \varphi) - \\
& + y_S''(-x_{B_0} - \sin \varphi - x_{A_0}m_{20}) - \sin \varphi - x_{A_0}m_{20} - y_{B_0}\varphi'^2 \sin \varphi - \\
& -x_{B_0} - x_{B_0}\varphi'^2 \cos \varphi + N_{Z_0}x_{Z_0} - F_{Z_0}y_{Z_0} + N_{P_0}x_{P_0} - F_{P_0}y_{P_0},
\end{aligned}$$

где  $x_S, y_S$  — координаты точки  $S$  в неподвижных осях  $OXY$ ,  $\gamma$  — угол вращения маховика,  $\varphi$  — угол вращения дебаланса,  $m_{10}, m_{20}$  — массы корпуса и маховика соответственно,  $L = -(1 + m_{10} + m_{20}) < 0$ ,  $(x_{A_0}, y_{A_0}), (x_{B_0}, y_{B_0}), (x_{Z_0}, y_{Z_0}), (x_{P_0}, y_{P_0})$  — координаты точек  $A, B, Z, P$  в осях  $Sxy$  соответственно,  $J_{10}, J_{20}$  — центральные моменты инерции маховика и дебаланса относительно оси перпендикулярной плоскости движения соответственно,  $N_{Z_0}, F_{Z_0}, N_{P_0}, F_{P_0}$  — нормальная и тангенциальная реакции в точках опоры  $Z$  и  $P$  соответственно. Штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau = t\sqrt{g/r}$ . Система (1) представляет собой систему переменной структуры, в частности, по причине наложения на движение корпуса односторонней связи:  $N_{Z_0} \geq 0, N_{P_0} \geq 0$ .

Получены оценки для внутренних моментов, требуемых для реализации предложенного алгоритма. В частности, для реализации режима полета эти моменты выглядят следующим образом:

$$(2) \quad M_{13} = (\cos \varphi \varphi'^2 + 1) \sin \varphi + \varphi''(-\cos \varphi^2 + J_{30} + 1), M_{12} = J_{20}\gamma'',$$

где  $M_{13}, M_{12}$  — безразмерные величины моментов двигателей дебаланса и маховика соответственно.

### 3. Заключение

Рассмотрена задача о плоском движении вибрационного робота с дебалансом и маховиком. Предложен вариант алгоритма управления, обеспечивающий выход системы на режим циклического движения с учетом ограничений на управляющие угловые ускорения дебаланса и маховика. Получены оценки для моментов двигателей, необходимых для реализации этапов предложенного алгоритма.

Исследование выполнено в рамках государственного задания Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

### Список литературы

1. *Голлицына М.В., Самсонов В.А.* Оценка области допустимых параметров системы управления вибрационным роботом // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 85–101.
2. *Dosayev M.* Algorithm for Controlling an Inertiod Robot With a Flywheel and an Unbalance in Conditions of Restrictions on the Angular Acceleration of the Unbalance // Applied Mathematical Modelling. 2022. V. 109. P. 797–807.

### **Estimation of Internal Moments in the Problem of Controlling A robot With an Eccentric Weight and a Flywheel**

*M. Z. Dosayev*

Lomonosov Moscow State University, Russia  
dosayev@imec.msu.ru

In the problem of planar motion of a vibration-driven robot with an eccentric weight and flywheel on a rough surface, a control algorithm variant is considered that ensures non-reversible translational motion of the robot body. The control inputs are the angular accelerations of the eccentric weight and flywheel. An estimate of the motor torques required to implement the control accelerations is provided.

---

## Критерий Ляпунова для систем с запаздыванием: вычислительная эффективность вместо общности

*А. В. Егоров*

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия  
alexey.egorov@spbu.ru

Рассматривается задача анализа экспоненциальной устойчивости стационарных линейных систем с запаздыванием. Важным инструментом для решения этой задачи является матрица Ляпунова — функциональная матрица, заданная на компакте. Известен критерий устойчивости, который формулируется в терминах положительной определенности специальной блочной матрицы, элементы которой вычисляются на основе значений матрицы Ляпунова в конечном наборе точек. В ряде случаев практическое применение этого критерия ограничено из-за высокой размерности блочной матрицы, которая зависит от параметров системы. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий заменить проверку положительной определенности исходной матрицы высокой размерности на анализ последовательности матриц меньшей размерности. Доказано, что положительная определенность каждой матрицы из последовательности является достаточным условием устойчивости, а сама последовательность сходится к матрице из критерия.

*Ключевые слова:* линейные системы с запаздыванием, экспоненциальная устойчивость, матрица Ляпунова, достаточные условия

### 1. Введение

Для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений известен критерий экспоненциальной устойчивости Ляпунова. Он требует проверки на положительную определенность матрицы Ляпунова  $V$ , являющейся решением матричного уравнения  $A^T V + V A = -W$  для некоторой положительно определенной матрицы  $W$ . В последние два десятилетия была развита теория матриц Ляпунова для систем с запаздыванием [1], которая привела к обобщению критерия Ляпунова [2]. Для систем с запаздыванием критерий требует проверки на положительную определенность блочной матрицы, основанной на матрице Ляпунова. Размерность этой матрицы не постоянна, как в случае уравнений без запаздывания, а зависит от параметров системы. Актуальна задача ее уменьшения. В этой работе редукцию предлагается сделать за счет отказа от «необходимости»

условий теоремы (то есть отказа от общности).

## 2. Основной результат

Рассмотрим стационарную вещественную  $n$ -мерную систему

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h)$$

с одним запаздыванием  $h > 0$ . Для этой системы можно ввести фундаментальную матрицу  $K = K(t)$ ,  $t \geq -h$ , каждый столбец которой удовлетворяет (1) для  $t > 0$ , а сама матрица удовлетворяет начальному условию  $K(t) = 0$ ,  $t \in [-h, 0)$ ,  $K(0) = I$ , где  $I$  — единичная матрица. Далее для натуральных  $r \geq 2$  нам понадобится число  $\delta_r = \frac{h}{r-1}$  и блочная матрица, построенная на основе фундаментальной:

$$\mathcal{P}_r = \left( I, K(\delta_r), K(2\delta_r), \dots, K((r-1)\delta_r) \right) \in \mathbf{R}^{n \times nr}.$$

Важным инструментом [1], позволяющим исследовать устойчивость и робастную устойчивость систем с запаздыванием, является матрица Ляпунова  $U = U(\tau)$ ,  $\tau \in [-h, h]$ , которая при выполнении условия Ляпунова (т.е. почти всегда) однозначно определяется для заданной положительно определенной матрицы  $W$  через следующие свойства:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} U(\tau) &= U(\tau)A_0 + U(\tau-h)A_1, \quad \tau \in (0, h), \\ U(\tau) &= U^T(\tau), \quad \tau \in [-h, h], \\ A_0^T U(0) + A_1^T U(h) + U(0)A_0 + U(-h)A_1 &= -W. \end{aligned}$$

Матрица Ляпунова для случая одного запаздывания может быть построена аналитически через матричную экспоненту, кроме того, существуют различные эффективные численные методы. Нас в рамках этой работы интересует следующий критерий экспоненциальной устойчивости, выраженный в терминах матрицы Ляпунова, который обобщает классический критерий Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теорема 1** ([2]). Система (1) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда матрица  $\mathcal{K}_r - \alpha_1 \mathcal{P}_r^T \mathcal{P}_r$  положительно определена.

Основным элементом теоремы является блочная матрица

$$\mathcal{K}_r = \left[ U((j-i)\delta_r) \right]_{i,j=1}^r,$$

построенная на основе матрицы Ляпунова. Кроме того, в теореме участвуют два числа: положительное  $\alpha_1$  и натуральное  $r$ . Для этих чисел в работе [2] представлены явные формулы, выражающие их через  $\alpha_1$ , матрицу Ляпунова  $U$ , матрицы  $A_0, A_1$  и величину запаздывания  $h$ . Число  $r$  характеризует сложность проверки условий теоремы, с ростом  $h$  оно неограниченно растет. Таким образом, актуальным является вопрос уменьшения  $r$  для расширения возможностей метода.

Ранее было доказано [2], что положительная определенность матрицы  $\mathcal{K}_r - \alpha_1 \mathcal{P}_r^T \mathcal{P}_r$  при любом значении  $r$  является необходимым условием экспоненциальной устойчивости. То есть, выбрав меньшую размерность  $r$  критерия, мы не потеряем «необходимости» условий, но, конечно, потеряем достаточность. Цель этого исследования в том, чтобы добиться обратного, уменьшить размерность критерия за счет потери необходимости, сохранив достаточность.

Как было отмечено выше, число  $r$  зависит от  $\alpha_1$ . Чем больше  $\alpha_1$ , тем меньше  $r$ . В рамках критерия параметр  $\alpha_1$  — это конкретное положительное число, которое определяется исходной системой. Это число является довольно грубой нижней оценкой для спектра ограниченного самосопряженного оператора, напрямую связанного с матрицей Ляпунова. Мы же предлагаем заменить  $\alpha_1$  произвольным числом  $\hat{\alpha}_1 > \alpha_1$ . При этом число  $r$  уменьшится, но, если  $\hat{\alpha}_1$  выбрано слишком большим, то матрица  $\mathcal{K}_r - \hat{\alpha}_1 \mathcal{P}_r^T \mathcal{P}_r$  может не быть положительно определенной даже для экспоненциально устойчивой системы. Если это произошло, то предлагается постепенно уменьшать число  $\hat{\alpha}_1$  до тех пор, пока матрица  $\mathcal{K}_r - \hat{\alpha}_1 \mathcal{P}_r^T \mathcal{P}_r$  не станет положительно определенной. Если же мы в итоге дойдем до значения  $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1$ , так и не получив положительной определенности, то согласно теореме 1 можно будет заключить, что система (1) экспоненциально устойчивой не является.

Таким образом можно построить конечный итерационный процесс, на каждом этапе которого мы проверяем достаточное условие экспоненциальной устойчивости, а на последнем шаге приходим к необходимому и достаточному условию.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 23-71-10099), <https://rscf.ru/project/23-71-10099/>.

### Список литературы

1. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhäuser, 2013.
2. *Mondié S., Egorov A., Gomez M.A.* Lyapunov Stability Tests for Linear Time-Delay Systems // Annual Reviews in Control, Elsevier Publ. 2022. V. 54. P. 68–80.

# Lyapunov Criterion for Time-Delay Systems: Computational Efficiency over Generality

*A. V. Egorov*

SPbU, St. Petersburg, Russia  
alexey.egorov@spbu.ru

The problem of exponential stability analysis for linear time-invariant delay systems is considered. A key tool for addressing this problem is the Lyapunov matrix — a functional matrix defined on a compact set. A known stability criterion is formulated in terms of the positive definiteness of a special block matrix, whose elements are based on the values of the Lyapunov matrix at a finite set of points. In some cases, the practical application of this criterion is limited due to the high dimension of the block matrix, which depends on the system parameters. This paper proposes a method which replaces the positive definiteness test of the original high-dimensional matrix with the analysis of a sequence of matrices of lower dimension. It is proven that the positive definiteness of each matrix in the sequence is a sufficient stability condition, and that the sequence itself converges to the matrix from the original criterion.

---

## Устойчивость по Лагранжу и глобальная асимптотическая устойчивость маятниковых систем

А. П. Елсаков<sup>1</sup>, А. В. Проскурников<sup>2</sup>, В. Б. Смирнова<sup>1,3</sup>

СПбГАСУ, Санкт-Петербург, Россия<sup>1</sup>

АО Навис, Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия<sup>3</sup>

elsakov982@inbox.ru, avp1982@gmail.com, smirnova\_vera\_b@mail.ru

Маятниковые системы характеризуются периодическими нелинейностями и счетным множеством положений равновесия. Для таких систем актуальны устойчивость по Лагранжу и глобальная асимптотическая устойчивость. В докладе применяется метод Попова. Предложены новые типы функционалов Попова, сформулированы новые условия устойчивости.

*Ключевые слова:* маятниковые системы, частотные критерии, глобальная асимптотическая устойчивость

### 1. Введение

Доклад посвящен устойчивости систем непрямого управления с периодическими нелинейностями. Такие системы обладают счетным множеством положений равновесия. Их простейшим примером является математический маятник. Поэтому часто такие системы называют маятниковыми. Предполагается, что математическое описание системы может быть приведено к интегро-дифференциальному уравнению Вольтерра. В докладе устойчивость уравнений Вольтерра традиционно исследуется методом априорных интегральных оценок Попова [1]. Развивается аппарат функционалов Попова, специально сконструированных для маятниковых систем [2]. Итогом являются новые критерии для оценки областей устойчивости маятниковых систем.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую интегро-дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} = b(t) + \rho\varphi(\sigma(t-h)) - \int_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\sigma(\tau))d\tau \quad (t > 0),$$

где  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $h \geq 0$ ;  $b, \gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Сделаны предположения:

1)  $b(t)$  равномерно непрерывна,  $\gamma(t)$  кусочно-непрерывна,

$$b(t)e^{rt}, \gamma(t)e^{rt} \in L_2[0, +\infty) \quad (r > 0).$$

2)  $\varphi(\sigma) \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(\sigma)$   $\Delta$ -периодична и имеет на промежутке  $[0, \Delta)$  два нуля, причем  $\varphi'(\sigma_1) \cdot \varphi'(\sigma_2) < 0$ . Система имеет счетное множество положений равновесия.

В докладе изучаются два типа устойчивости: устойчивость по Лагранжу, т.е. ограниченность любого решения (1) и глобальная асимптотическая устойчивость — стремление любого решения (1) к какому-либо положению равновесия при стремлении  $t$  к бесконечности.

Цель данной работы — установить новые условия устойчивости.

### 3. Теоремы об устойчивости

Введем в рассмотрение ряд величин. Пусть  $\mu_1 \leq \varphi'(\sigma) \leq \mu_2$ . Пусть  $\alpha_1 \leq \mu_1$ ,  $\alpha_2 \geq \mu_2$  ( $\alpha_i$  может быть числом или  $\pm\infty$ ),  $\alpha \triangleq (\alpha_1, \alpha_2)^\top$ . Построим функции

$$\Phi(\sigma; \alpha) = \sqrt{(1 - \alpha_1^{-1}\varphi'(\sigma))(1 - \alpha_2^{-1}\varphi'(\sigma))},$$

$$\nu(\varepsilon, \tau, \alpha) \triangleq \frac{\int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma}{\int_0^\Delta |\varphi(\sigma)| \sqrt{\varepsilon + \tau\Phi^2(\sigma; \alpha)} d\sigma}.$$

Передаточная функция системы от входа  $\varphi$  к выходу  $(-\dot{\sigma})$  имеет вид

$$K(p) = -\rho e^{-ph} + \int_0^\infty \gamma(t) e^{-pt} dt \quad (p = \theta + i\omega, i^2 = -1).$$

Определим функцию

$$Q(p; \varepsilon, \tau, \alpha) \triangleq \operatorname{Re} \left\{ K(p) - \varepsilon |K(p)|^2 - \tau (K(p) + \alpha_1^{-1}p)^* (K(p) + \alpha_2^{-1}p) \right\}.$$

**Теорема 1.** *Предположим, что существуют такие числа  $\lambda \in [0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\alpha_1 \leq \mu_1$ ,  $\alpha_2 \geq \mu_2$ , что выполнены неравенства:*

- 1)  $\inf_{\{\omega \geq 0\}} Q(i\omega - \lambda; \varepsilon, \tau, \alpha) > \frac{\nu^2(\varepsilon, \tau, \alpha)}{4},$
- 2)  $\left( |\nu(\varepsilon, \hat{\tau}, \alpha)| \sqrt{\varepsilon + \hat{\tau} \max \Phi^2(\sigma; \alpha) - 1} \right) \leq 0 \quad (0 \leq \hat{\tau} \leq \tau).$

Тогда уравнение (1) устойчиво по Лагранжу.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия Теоремы 1. Пусть, кроме того, можно указать такие  $\alpha'_1 \leq \mu_1, \alpha'_2 \geq \mu_2, \varepsilon' > 0, \tau' > 0, \delta' > 0,$  что выполнено неравенство

$$Q(i\omega; \varepsilon', \tau', \alpha') > \delta' \quad \forall \omega \geq 0.$$

Тогда для любого решения (1) справедливы предельные соотношения

$$\sigma(t) \rightarrow q \quad (\varphi(q) = 0), \quad \dot{\sigma}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

#### 4. Заключение

В докладе приводятся новые частотные критерии устойчивости по Лагранжу и глобальной асимптотической устойчивости для систем непрямого управления с периодическими нелинейностями.

#### Список литературы

1. *Rasvan V.* Four Lectures on Stability. Lecture 3. The Frequency Domain Criterion for Absolute Stability // Control Engineering and Applied Informatics. 2006. V. 8. No. 2. P. 13–20.
2. *Smirnova V.B., Proskurnikov A.V.* Volterra Equations with Periodic Nonlinearities: Multistability, Oscillations and Cycle Slipping // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2019. V. 29. No. 5. P. 1950068 (26p.).

### Lagrange Stability and Global Asymptotic Stability of Pendulum-Like Systems

*A. P. Elsakov<sup>1</sup>, A. V. Proskurnikov<sup>2</sup>, V. B. Smirnova<sup>1,3</sup>*

SPbGASU, Saint Petersburg, Russia<sup>1</sup>

Navis JSC, Saint Petersburg, Russia<sup>2</sup>

Saint Petersburg, Russia<sup>3</sup>

elsakov982@inbox.ru, avp1982@gmail.com, smirnova\_vera\_b@mail.ru

Pendulum systems are characterized by periodic nonlinearities and a countable set of equilibria. For such systems, Lagrange-stability and global asymptotic stability are relevant. The report uses the Popov method. New types of Popov functionals are proposed, and new stability conditions are formulated.

## Стабилизация стационарных билинейных комплексных систем

В. А. Зайцев

УдГУ, Ижевск, Россия  
verba@udm.ru

Для билинейной автономной системы управления с комплексными коэффициентами получены достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения посредством статической обратной связи по состоянию с комплексными коэффициентами.

*Ключевые слова:* глобальная асимптотическая стабилизация, билинейная система, обратная связь, комплексная система

### 1. Введение

Рассмотрим билинейную систему управления

$$(1) \quad \dot{z} = (A + u_1 B_1 + u_2 B_2 + \dots + u_r B_r)z.$$

Здесь  $z \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u = \text{col}(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r$  — вектор управления,  $\dot{z} = dz/dt$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A, B_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $j = \overline{1, r}$ . Задачам стабилизации системы (1) посвящено большое количество работ. Один из подходов использует методику Джарджевича–Куинна [1]. Она основана на теореме Барбашина–Красовского второго метода Ляпунова. С помощью этого подхода были получены достаточные условия глобальной асимптотической стабилизации нулевого решения системы (1) (а также более общих нелинейных систем) посредством статической обратной связи по состоянию  $u(z)$  (см., например, [2]).

В работе [3] методика Джарджевича–Куинна была перенесена на комплексные системы ( $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $A, B_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $j = \overline{1, r}$ ) с вещественным управлением  $u \in \mathbb{R}^r$ . Приведем один из результатов работы [3]. Для произвольной матрицы  $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$  введем отображение  $\mathcal{W}_F$ , которое ставит в соответствие матрице  $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$  матрицу  $\mathcal{W}_F H = F^* H + H F \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Здесь  $*$  — операция эрмитова сопряжения. Предположим, что свободная система

$$\dot{z} = Az$$

устойчива по Ляпунову (не асимптотически). Тогда (и только тогда) существует матрица  $P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  такая, что выполнены неравенства

$$(2) \quad P \succ 0, \quad A^*P + PA \preceq 0$$

в смысле квадратичных форм.

Построим множества

$$(3) \quad \Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : z^*(W_A^s P)z = 0, s \in \mathbb{N}\},$$

$$\Sigma_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : z^*(W_A^s(W_{B_j} P))z = 0, s = 0, 1, \dots\}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $A, B_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ . Пусть существует матрица  $P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  такая, что выполнены неравенства (2), и выполнено следующее условие:  $\Omega_1 \cap \Sigma_1 = \{0\}$ . Тогда обратная связь по состоянию

$$u_j = u_j(z) = -z^*(B_j^*P + PB_j)z, \quad j = \overline{1, r},$$

глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы (1).

В случае, когда матрицы системы обращаются в вещественные, результат теоремы 1 совпадает с соответствующим результатом [2] для вещественных систем.

В настоящей работе мы, так же как и в [3], рассматриваем систему (1) с комплексными коэффициентами ( $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $A, B_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $j = \overline{1, r}$ ), однако расширяем (по сравнению с [3]) класс допустимых управлений: предполагаем, что управление является не вещественным, а комплексным, то есть  $u \in \mathbb{C}^r$ . Это, в действительности, расширяет возможности и позволяет добиться стабилизации при менее ограничительных условиях.

## 2. Основной результат

Для произвольной матрицы  $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$  введем отображение  $\mathcal{R}_F$ , которое ставит в соответствие матрице  $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$  матрицу  $\mathcal{R}_F H = 2F^*H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Построим множество (3) и множество

$$\Upsilon_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : z^*(W_A^s(\mathcal{R}_{B_j} P))z = 0, s = 0, 1, \dots\}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $A, B_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $u \in \mathbb{C}^r$ . Пусть существует матрица  $P = P^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$  такая, что выполнены неравенства (2), и выполнено следующее условие:  $\Omega_1 \cap \Upsilon_1 = \{0\}$ . Тогда обратная связь по состоянию

$$u_j = u_j(z) = -2z^* B_j^* P z, \quad j = \overline{1, r},$$

глобально асимптотически стабилизирует нулевое решение системы (1).

*Замечание 1.* Теорема 2 является обобщением теоремы 1 со случая  $u \in \mathbb{R}^r$  на случай  $u \in \mathbb{C}^r$ : если в теореме 2 управление обращается в вещественное, то теорема 2 совпадает с теоремой 1.

*Замечание 2.* Расширение теоремы 1 до теоремы 2 не является пустым: существуют примеры комплексных систем (1) ( $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $A, B_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $j = \overline{1, r}$ ), которые невозможно стабилизировать с помощью вещественных управлений  $u \in \mathbb{R}^r$ , но возможно стабилизировать с помощью комплексных управлений  $u \in \mathbb{C}^r$ .

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (Проект FEWS-2024-0009).

#### Список литературы

1. *Jurdjevic V., Quinn J.P.* Controllability and stability // Journal of Differential Equations. 1978. V. 28. No. 3. P. 381–389.
2. *Lin W.* Global Asymptotic Stabilization of General Nonlinear Systems With Stable Free Dynamics via Passivity and Bounded Feedback // Automatica. 1996. V. 32. No. 6. P. 915–924.
3. *Zaitsev V.* Global Asymptotic Stabilization of Autonomous Bilinear Complex Systems // European Journal of Control. 2022. V. 65. P. 100644.

### Stabilization of Time-Invariant Bilinear Complex Systems

*V. A. Zaitsev*

Udmurt State University, Izhevsk, Russia  
verba@udm.ru

For a bilinear time-invariant control system with complex coefficients, sufficient conditions for global asymptotic stabilization of the zero solution are obtained using static state feedback with complex coefficients.

## Оптимальное управление группой исполнителей на основе решения задачи о назначениях с ограничениями

А. В. Иванюхин

НИИ ПМЭ МАИ, Москва, Россия

РУДН им. Патриса Лумумбы, Москва, Россия

ivanyukhin.a@yandex.ru

Рассмотрена постановка несбалансированной задачи о назначениях с дополнительными ограничениями. Предложена схема релаксации к задаче линейного программирования с помощью серии вспомогательных задач. В качестве примера рассмотрена модельная задача управления спутниковой группировкой для распределения зон обслуживания.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, дискретное математическое программирование, задача о назначениях

### 1. Введение

Задача о назначениях — одна из фундаментальных задач комбинаторной оптимизации в области дискретного математического программирования. Она состоит в наилучшем распределении некоторого числа работ между исполнителями [1]. Эта формулировка охватывает широкий класс практических задач. В данной работе рассматривается несбалансированная постановка с рядом дополнительных ограничений: на нагрузку исполнителя и введением несовместных задач. Предлагается общая методика решения, основанная на редукции к задаче линейного программирования через серию вспомогательных задач.

Рассмотренная задача и предложенная методика применяется к модельной задаче управления многоспутниковой группировкой с пересечением зон покрытия для оптимизации ресурсов группировки.

### 2. Общая постановка

Пусть есть  $n$  исполнителей и  $m$  задач, причём  $m \neq n$ . Каждая задача должна быть выполнена ровно одним исполнителем. Ресурсы исполнителя ограничены. Заданы пары несовместных задач — их нельзя назначать одному и тому же исполнителю. Требуется распределить все задачи и минимизировать суммарные затраты [1]. То есть

- целевая функция

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min;$$

- исполнитель может быть назначен на несколько задач

$$(2) \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

- ограничения на максимальную загрузку исполнителя

$$(3) \quad \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \leq l_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

- каждая задача выполняется ровно одним исполнителем

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

- условие несовместности задач

$$(5) \quad x_{ij_1} + x_{ij_2} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall (j_1, j_2) \in S;$$

- булевость переменных

$$(6) \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j.$$

Индекс  $i$  соответствует исполнителю;  $j$  — задачам;  $c_{ij}$  — затраты для выполнения  $i$ -им исполнителем  $j$ -ой задачи; выбор переменных  $x_{ij}$  соответствует правилу —  $x_{ij} = 1$  если исполнитель  $i$  назначен на задачу  $j$ , иначе  $x_{ij} = 0$ ;  $l_i$  — максимально допустимое число задач для исполнителя  $i$ ,  $S$  — множество пар несовместных задач.

В данной работе рассматривается случай, когда исполнителей меньше, чем задач ( $n < m$ ).

### 3. Методика решения

Для решения задачи о назначениях в несбалансированном виде с дополнительными ограничениями предлагается использовать подход на основе расширения множества исполнителей за счет их дублирования, в результате чего осуществляется переход к канонической постановке, которая решается с помощью сведения (релаксации) к задаче квадратичного программирования с переводом ограничений на максимальную нагрузку в форму квадратичного штрафа. Обратный переход

к задаче линейного программирования предлагается проводить с помощью метода Вульфа [2] за счет расширения множества параметров задачи. Полученную при этом задачу линейного программирования с ограничениями при формировании базисного решения предлагается решать с помощью симплекс метода [3]. Таким образом рассмотренная задача о назначениях может быть сведена к задаче линейного программирования путем предложенной серии преобразований.

#### 4. Заключение

В работе рассмотрена общая постановка несбалансированной задачи о назначениях с ограничениями. Предложена эффективная схема релаксации к задаче линейного программирования. Работа методики продемонстрирована на ряде тестовых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-79-30009), <https://rscf.ru/project/25-79-30009/>.

#### Список литературы

1. *Rainer B., Dell'Amico M., Martello S.* Assignment Problems. Printed in the USA. Philadelphia: SIAM, 2009.
2. *Табак Д., Кур Б.* Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука, 1975.
3. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Физматлит, 2004.

### Optimal Control of a Team of Agents Based on a Constrained Assignment Problem

*A. V. Ivanyukhin*

RIAME MAI, Moscow, Russia  
RUDN university, Moscow, Russia  
[ivanyukhin.a@yandex.ru](mailto:ivanyukhin.a@yandex.ru)

A general formulation of the unbalanced assignment problem with additional constraints is considered. A relaxation scheme to a linear programming problem through a series of intermediate problems is proposed. A model problem of satellite constellation control for distributing service areas is examined as an illustrative example.

---

## Об одной задаче управления транспортным потоком в макроскопической модели Пейна–Уизема

*И. В. Изместьев, Е. А. Скрипов, А. М. Баринов*

Челябинский Государственный Университет, Челябинск, Россия  
j748e8@gmail.com, zskripov@mail.ru, barinovalexmih@mail.ru

В работе рассматривается задача управления транспортным потоком на заданном участке дороги. Динамика потока описывается модифицированной макроскопической моделью Пейна–Уизема. В модель добавлено слагаемое, описывает внешние источники притока или оттока транспортных средств. Точное значение этого слагаемого неизвестно. Заданы только границы его изменения. Показателем качества управления является значение линейной комбинации плотности потока и количества транспортных средств, ожидающих въезда на дорогу. Цель управления заключается в том, чтобы значение этого показателя в фиксированный момент времени принадлежало заданному промежутку.

*Ключевые слова:* управление, транспортный поток, макроскопическая модель, уравнение переноса

### 1. Введение

Макроскопические модели, рассматривающие транспортный поток как сплошную среду, позволяют эффективно описывать динамику плотности и скорости на протяженных участках дорог. Среди таких моделей большое распространение получила модель Пейна–Уизема [1], которая в различных модификациях используется как для анализа, так и для управления транспортными потоками.

Особый интерес представляют задачи граничного управления, когда управляющие воздействия прикладываются на въездах и выездах с участка дороги. Такие задачи описывают реальные системы управления, основанные на светофорном регулировании и системах платного въезда. В данной работе рассматривается задача граничного управления транспортным потоком на основе модифицированной модели Пейна–Уизема.

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим участок дороги длины  $l$ . Зафиксируем момент времени  $T > 0$ . Обозначим через  $\rho(t, x)$  плотность транспортного потока (число автомобилей на единицу длины) в момент времени  $t \in [0, T]$  в точке

$x \in [0, l]$ , а через  $v(t, x)$  — скорость потока. Динамика транспортного потока описывается модифицированной моделью Пейна–Уизема:

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = f(t, x),$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V(\rho) - v),$$

где  $V(\rho)$  — скорость, которая считается предпочтительной для водителей, и вычисляется как  $V(\rho) = v_{\max}(1 - \rho/\rho_{\max})$ . Здесь  $v_{\max}$  — максимальная скорость свободного потока,  $\rho_{\max}$  — максимальная плотность, при которой движение останавливается,  $\tau > 0$  — время релаксации, характеризующее инерционность водителей. В отличие от классической модели Пейна–Уизема считаем, что на данную систему влияет функция  $f(t, x)$ , описывающая внешние источники притока или оттока транспортных средств.

Начальные условия задаются в виде

$$(3) \quad \rho(0, x) = \rho_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \quad x \in [0, l],$$

где  $\rho_0(x)$  и  $v_0(x)$  — заданные непрерывные на отрезке  $[0, l]$  функции.

На левом конце участка ( $x = 0$ ) плотность потока изменяется согласно уравнению

$$(4) \quad \frac{d\rho(t, 0)}{dt} = c_1(t) + c_2(t)u(t), \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T],$$

где  $u(t)$  — управляющее воздействие; функции  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  непрерывны, причем  $c_2(t) \geq 0$  и

$$\int_0^t c_1(r) dr \geq \int_0^t c_2(r) dr, \quad 0 \leq t \leq T,$$

что гарантирует неотрицательность плотности  $\rho(t, 0)$ . Для скорости потока на левом конце задано условие:

$$(5) \quad v(t, 0) = v_{\text{in}}(t), \quad t \in [0, T],$$

где  $v_{\text{in}}(t)$  — заданная непрерывная функция.

На правом конце ( $x = l$ ) считаем, что дорога имеет максимальную пропускную способность, что соответствует условиям:

$$(6) \quad \rho(t, l) = 0, \quad \frac{\partial \rho(t, l)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(t, l)}{\partial x} = 0, \quad v(t, l) = v_{\max}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Условие  $\rho(t, l) = 0$  соответствует свободному выезду, а условие  $v(t, l) = v_{\max}$  означает, что скорость на выезде максимальна.

Функция  $f(t, x)$  не задана точно, но известны ее оценки:

$$(7) \quad f_1(t, x) \leq f(t, x) \leq f_2(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, l],$$

где  $f_1(t, x)$ ,  $f_2(t, x)$  — непрерывные функции.

Пусть  $Q(t)$  — количество автомобилей, ожидающих въезда на дорогу. Тогда динамика  $Q(t)$  описывается уравнением

$$\dot{Q}(t) = -\rho(t, 0)v(t, 0), \quad t \in [0, T].$$

Пусть заданы числа  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ , и  $q > 0$ . Цель выбора управления  $u(t)$  в (4) — осуществить неравенство

$$(8) \quad \left| \int_0^l \alpha_1 \rho(T, x) \sigma(x) dx + \alpha_2 Q(T) - q \right| \leq \varepsilon$$

при любой непрерывной функции (7). Здесь  $\sigma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  заданная непрерывная функция, которая удовлетворяет условиям  $\sigma(0) = 0$ ,  $\sigma(x) \geq 0$  при  $x \in (0, l]$ .

### 3. Основной результат

После замены переменных задача (1)–(8) сводится к одномерной однотипной задаче управления при наличии помехи [2]

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)\eta, \quad |\eta| \leq 1, \quad |z(p)| \leq \varepsilon.$$

Найдено множество начальных позиций, для которых существует управление  $u$ , гарантирующее достижение цели (8) при любых неизвестных функциях (7).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (Проект № 25-21-00679), <https://rscf.ru/project/25-21-00679/>.

### Список литературы

1. *Payne H.J.* Models of Freeway Traffic and Control // Mathematical Models of Public Systems. Simulation Council Proc. 1971. V. 1. P. 51–61.
2. *Ухоботов В. И.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями : учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005.

## On a Problem of Traffic Flow Control in the Macroscopic Payne-Whitham Model

*I. V. Izmestiev, E. A. Skripov, A. M. Barinov*

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia  
j748e8@gmail.com, zskripov@mail.ru, barinovalexmih@mail.ru

This paper examines the problem of traffic flow control on a given road section. Flow dynamics are described using a modified Payne-Whitham macroscopic model. A term describing external sources of vehicle influx or outflow is added to the model. The exact value of this term is unknown; only the limits of its variation are specified. The control performance indicator is the linear combination of flow density and the number of vehicles waiting to enter the road. The goal of management is to ensure that the value of this indicator at a fixed point in time belongs to a given interval.

---

УДК 62-50

### Децентрализованное управление активным магнитным подшипником с использованием наблюдателя для стабилизации движения ротора

*Д. И. Исаева, Д. В. Баландин*

АНОО ВО «Университет «Сириус», Сириус, Россия  
isaeva.di@talantiuspech.ru, balandin.dv@talantiuspech.ru

Рассматривается задача оптимального децентрализованного управления вертикальным жестким ротором, вращающимся в активных магнитных подшипниках. Используемый подход позволяет вычислить коэффициенты управления аналитически. Синтезирован наблюдатель на основе линейных матричных неравенств. Приведены результаты численного моделирования.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, линейные матричные неравенства

В работе рассматривается объект управления — жесткий вертикальный ротор, вращающийся в активных магнитных подшипниках (рис. 1). Движение объекта описывается системой дифференциальных

уравнений [1]:

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\alpha} &= l_2 F_{2-1}^l - l_1 F_{2-1}^u - J_z \omega \dot{\beta} + M_1, \\
 J\ddot{\beta} &= l_1 F_{3-4}^u - l_2 F_{3-4}^l + J_z \omega \dot{\alpha} + M_2, \\
 m\ddot{\xi} &= F_{3-4}^u + F_{3-4}^l + F_{w1}, \\
 m\ddot{\eta} &= F_{2-1}^u + F_{2-1}^l + F_{w2}.
 \end{aligned}$$

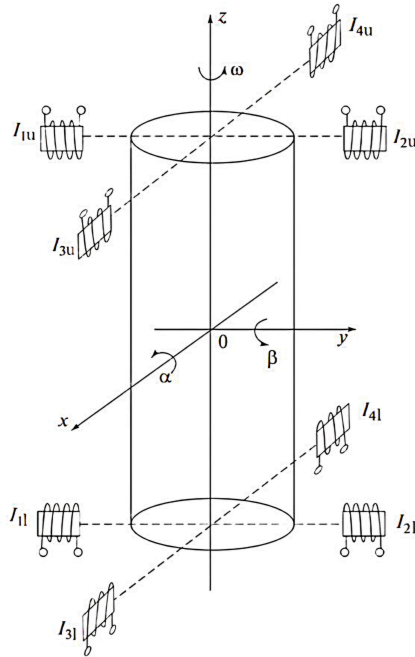


Рис. 1: Модель ротора

Здесь  $\alpha, \beta$  — углы поворота ротора относительно осей  $x$  и  $y$ ,  $\xi$  и  $\eta$  — координаты центра масс ротора,  $l_1, l_2$  — расстояния от центра масс до верхнего и нижнего подшипников,  $J, J_z$  — главные моменты инерции,  $\omega$  — заданная угловая частота вращения,  $\delta_0$  — зазор между ротором и электромагнитом,  $M_1, M_2, F_{w1}, F_{w2}$  — возмущения.

Электромагнитные силы определяются соотношениями:

$$F_{2-1}^u = \gamma \left( \frac{I_{2,u}^2}{(\delta_0 - \eta_u)^2} - \frac{I_{1,u}^2}{(\delta_0 + \eta_u)^2} \right), \quad F_{2-1}^l = \gamma \left( \frac{I_{2,l}^2}{(\delta_0 - \eta_l)^2} - \frac{I_{1,l}^2}{(\delta_0 + \eta_l)^2} \right),$$

$$F_{3-4}^u = \gamma \left( \frac{I_{3,u}^2}{(\delta_0 - \xi_u)^2} - \frac{I_{4,u}^2}{(\delta_0 + \xi_u)^2} \right), \quad F_{3-4}^l = \gamma \left( \frac{I_{3,l}^2}{(\delta_0 - \xi_l)^2} - \frac{I_{4,l}^2}{(\delta_0 + \xi_l)^2} \right).$$

Здесь  $\gamma = \frac{L_0 \delta_0}{2}$ ,  $L_0$  — индуктивность каждого из электромагнитов,  $I_{k,u}, I_{k,l}$  — силы тока в верхних и нижних подшипниках соответственно,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $\xi_u, \eta_u, \xi_l, \eta_l$  — измеряемые смещения ротора в верхних и нижних электромагнитных подшипниках:

$$\xi_u = \xi + l_2 \beta, \quad \xi_l = \xi - l_1 \beta, \quad \eta_u = \eta - l_1 \alpha, \quad \eta_l = \eta + l_2 \alpha.$$

Используя идею линеаризации обратной связью по состоянию, приводим исходную систему к линейной системе с управлением:

$$u_1 = F_{2-1}^u, \quad u_2 = F_{2-1}^l, \quad u_3 = F_{3-4}^u, \quad u_4 = F_{3-4}^l.$$

В качестве функционалов используются  $J_1$  для оценки максимальных отклонений ротора и  $J_2$  для оценки максимальных управлений по отношению к неизвестным возмущениям  $w$ :

$$J_1 = \sup_{w \neq 0} \frac{\max \{ \sup_{t \geq 0} |\xi_u|, \sup_{t \geq 0} |\xi_l|, \sup_{t \geq 0} |\eta_u|, \sup_{t \geq 0} |\eta_l| \}}{\|w\|},$$

$$J_2 = \sup_{w \neq 0} \frac{\max_{k=1, \dots, 4} \{ \sup_{t \geq 0} |u_k| \}}{\|w\|}$$

Децентрализованное управление по состоянию строится в виде:

$$u_1 = -v_2(a\eta_u + b\dot{\eta}_u), \quad u_2 = -v_1(a\eta_l + b\dot{\eta}_l),$$

$$u_3 = -v_2(a\xi_u + b\dot{\xi}_u), \quad u_4 = -v_1(a\xi_l + b\dot{\xi}_l).$$

Здесь  $v_1 = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$ ,  $v_2 = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$ .

Параметры  $a, b$  вычисляются как [1]:

$$a = \frac{1 - \alpha}{v_1 \alpha} \sqrt{\frac{v_1^2 + \mu_0^2}{3(v_2^2 + \mu_0^2)}}, \quad b = \frac{2^{1/2}}{3^{1/4}} \frac{(v_1^2 + \mu_0^2)^{1/4} (v_2^2 + \mu_0^2)^{1/4}}{\sqrt{v_1 \mu_0 (v_2^2 + \mu_0^2)}} \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}$$

Здесь  $\mu_0 = \frac{ml_1 l_2}{J}$ .

Используя общий подход [2] к построению наблюдателя полного порядка, строим управление в виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= -v_2(a\eta_u + b\hat{\eta}_u), & u_2 &= -v_1(a\eta_l + b\hat{\eta}_l), \\ u_3 &= -v_2(a\xi_u + b\hat{\xi}_u), & u_4 &= -v_1(a\xi_l + b\hat{\xi}_l). \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\eta}_u, \hat{\eta}_l, \hat{\xi}_u, \hat{\xi}_l$  оценки соответствующих производных.

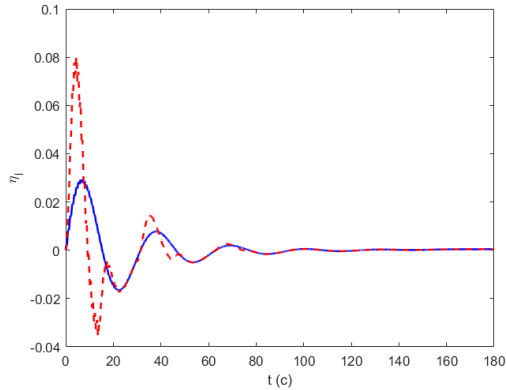


Рис. 2: Смещение ротора в верхнем подшипнике

Приводятся результаты численного моделирования (рис. 2) для параметров маломасштабной установки:  $J = 0.74$ ,  $J_z = 1.7 \times 10^{-2}$ ,  $l_1 = 0.3$ ,  $l_2 = 0.2$ ,  $m = 13.7$ ,  $\delta_0 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\omega = 314$ ,  $L_0 = 0.1$ ,  $T = \sqrt{\frac{m\delta_0}{\gamma}}$ ,  $a = 0.5788$ ,  $b = 1.1056$ .

$$w = e^{-0.05t} (\sin \Omega t, \sin \Omega t, \cos \Omega t, \cos \Omega t)^T.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 24-11-20023), <https://rscf.ru/project/24-11-20023/>.

#### Список литературы

1. Баландин Д. В., Бирюков Р. С., Коган М. М. Оптимальное по Парето управление ротором в электромагнитных подшипниках // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 6. С. 131–142.

2. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Наука, 2007.

## **Decentralized Active Magnetic Bearing Control with Observer-Based Rotor Motion Stabilization**

*D. I. Isaeva, D. V. Balandin*

Sirius University of Science and Technology, Sirius, Russia  
isaeva.di@talantiuspech.ru, balandin.dv@talantiuspech.ru

The problem of optimal decentralized control for a vertical rigid rotor supported by active magnetic bearings is considered. The approach under consideration allows analytical computation of the controller coefficients. An observer is synthesized using the linear matrix inequality technique. Numerical simulation results are presented.

---

УДК 517.977:531.36:521.1

### **К вопросам стабилизации стационарных движений спутника-гиростата в гравитационном и магнитном полях**

*В. И. Каленова<sup>1</sup>, В. М. Морозов<sup>1</sup>, А. А. Тихонов<sup>2</sup>*

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия<sup>1</sup>  
СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>

kalenova44@mail.ru, moroz@imec.msu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

Формулируются условия существования и управляемости ряда установившихся движений (положений равновесия и стационарных вращений) спутников-гиростатов, движущихся по круговым орбитам в гравитационном и магнитном полях Земли.

*Ключевые слова:* спутник-гиростат, стационарные движения, программные движения, гравитационное и геомагнитное поле, управляемость

### **1. Введение**

Среди различных факторов, влияющих на динамику управляемого вращательного движения спутника около центра масс, важную роль играют моменты сил, формируемые за счет взаимодействия спутника с гравитационным и магнитным полями Земли, а также внутренние

движения, возникающие из-за наличия на спутнике маховиков (рогоров) с осями вращения, неизменно закрепленными в корпусе спутника. Такой спутник обычно называют гиростатом. Устойчивость стационарных движений спутника-гиростата при действии гравитационного, аэродинамического и момента магнитного взаимодействия была рассмотрена ранее. В данной работе рассматриваются два типа установившихся движений спутника-гиростата около центра масс на круговой орбите в гравитационном и магнитном полях Земли. Первый тип — это известные стационарные движения, которые существуют как при отсутствии моментов сил, обусловленных магнитным полем Земли, так и при наличии этих моментов. Второй тип — программные движения. Эти движения могут существовать только при наличии моментов взаимодействия спутника-гиростата с геомагнитным полем.

## 2. Основной результат

Помимо гравитационного момента на спутник-гиростат действуют магнитные моменты, которые образуются как за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника (создаваемого электромагнитными катушками) с геомагнитным полем, так и моменты сил Лоренца, возникающие при наличии на спутнике электрического заряда. На спутнике установлены маховики, величины гиростатических моментов которых постоянны и обозначены через  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3$ .

Динамические уравнения движения спутника-гиростата около центра масс имеют вид [1]

$$\mathbf{J} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \tilde{\omega} \times \mathbf{J}\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \times \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{M}.$$

Здесь  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ ;  $J_1, J_2, J_3$  — главные центральные моменты инерции спутника; момент сил  $\mathbf{M}$  имеет три составляющих:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^G + \mathbf{M}^M + \mathbf{M}^L.$$

Здесь  $\mathbf{M}^G = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times (\mathbf{J}\mathbf{e}_r))$  — гравитационный момент;  $\mathbf{M}^M = \mathbf{m} \times (\boldsymbol{\Theta}^\top \mathbf{B})$  — момент сил, который создается за счет взаимодействия собственного магнитного момента спутника  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^\top$  с геомагнитным полем,  $\mathbf{B}(t)$  — индукция геомагнитного поля, заданная в орбитальной системе координат [2];  $\mathbf{M}^L = Q\rho_0 \times \boldsymbol{\Theta}^\top (\mathbf{V}_C \times \mathbf{B})$  — момент сил Лоренца, возникающий из-за наличия на спутнике электростатически заряженного экрана,  $Q$  — электростатический заряд;

$\rho_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$  — радиус-вектор центра заряда спутника относительно его центра масс;  $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс спутника относительно геомагнитного поля,  $\mathbf{V}_C = R\omega_0 \mathbf{e}_T$  [3].

В качестве математической модели магнитного поля Земли принята традиционная для большинства теоретических исследований модель «прямого магнитного диполя». Рассмотрены четыре вида относительных равновесий следующих двух типов:

1. Положение равновесия, в котором главные центральные оси инерции спутника-гиростата совпадают с осями орбитальной системы координат.

2. Относительные равновесия, в которых одна из осей инерции спутника-гиростата направлена либо по радиусу-вектору центра масс спутника, либо по касательной или нормали к орбите.

Получены условия управляемости для каждого из этих случаев как при наличии управления, создаваемого магнитными катушками, так и при управлении при помощи моментов сил Лоренца. Рассмотрены некоторые программные движения спутника-гиростата. Исследованы стационарные вращения, в которых одна из главных центральных осей инерции направлена по одной из осей орбитальной системы координат и гиростат вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью. Такие программные движения существуют и при отсутствии магнитных моментов. Рассмотрено также одно из возможных программных движений гиростата, в котором ось динамической симметрии спутника-гиростата фиксирована в орбитальной системе координат и составляет заданный угол с радиус-вектором орбиты в плоскости, ортогональной касательной к орбите, при этом спутник вращается вокруг указанной оси с постоянной относительной угловой скоростью. Следует отметить, что такое движение существует только при наличии постоянных магнитных моментов. Получены условия управляемости этого программного движения, как при наличии управления, создаваемыми магнитными катушками, так и при управлении при помощи моментов сил Лоренца. Полученные условия управляемости необходимы для построения корректных алгоритмов стабилизации указанных движений. Эти алгоритмы нетрудно построить аналогично тому, как это предлагалось ранее для более простых задач стабилизации стационарных движений спутников [4, 5].

Работа выполнена в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова (проект № АААА-А19-119012990123-0) и при частичной финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект №

### Список литературы

1. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1975.
2. *Wertz J.* Spacecraft attitude determination and control. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 1978.
3. *Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A.* Stabilization of a Programmed Rotation Mode for a Satellite With Electrodynamic Attitude Control System // *Advances in Space Research*, 2018. V. 62. P. 142–151.
4. *Каленова В.И., Морозов В.М., Рак М.Г.* Стабилизация регулярных прецессий спутника при помощи моментов сил Лоренца // *Космич. исслед.*, 2024. Т. 62. № 1. С. 89–96.
5. *Каленова В.И., Морозов В.М., Тихонов А.А.* Об управляемости регулярных прецессий спутника в гравитационном и магнитном полях // *Прикл. мат. и мех.* 2025. Т. 89. № 3. С. 385–395.

### On the Issues of Stabilization of Stationary Motions of a Gyrostat Satellite in Gravitational and Magnetic Fields

*V. I. Kalenova*<sup>1</sup>, *V. M. Morozov*<sup>1</sup>, *A. A. Tikhonov*<sup>2</sup>

Lomonosov Moscow State University Research Institute of Mechanics, Russia<sup>1</sup>

Saint Petersburg State University, Russia<sup>2</sup>

kalenova44@mail.ru, moroz@imec.msu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

The conditions for the existence and controllability of a number of steady-state motions (equilibrium positions and stationary rotations) of gyrostat satellites moving in circular orbits in the gravitational and magnetic fields of the Earth are formulated.

---

**Критерий Попова абсолютной устойчивости без S-процедуры***В. А. Каменецкий*

ИПУ РАН, Москва, Россия

vlakam@ipu.ru

Критерий Попова абсолютной устойчивости систем Лурье с несколькими стационарными нелинейностями получен без использования S-процедуры.

*Ключевые слова:* системы Лурье, устойчивость, функции Лурье-Постникова, матричные неравенства, критерий Попова

**1. Введение**

Теория абсолютной устойчивости занимает значительное место в общей теории управления. Подробный очерк развития этой теории приводится в [1]. Среди частотных условий абсолютной устойчивости «центральным результатом является критерий Попова» (цитата из [2]). Критерий Попова является достаточным (и необходимым в случае одной нелинейности) условием существования для системы Лурье функции Ляпунова вида Лурье–Постникова — квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности (в случае нескольких нелинейностей — плюс сумма интегралов от нелинейностей). Условием отрицательной определенности производной функции Лурье–Постникова (ФЛП) в силу системы, полученным с помощью S-процедуры, является матричное неравенство (МН). Полученные с помощью частотной теоремы (лемма Калмана–Якубовича–Попова, КУР лемма, см. [3]) частотные условия разрешимости этого МН и являются частотными условиями критерия Попова. Здесь показано, что S-процедура не единственный путь получения критерия Попова в рамках теории Ляпунова.

**2. Задача абсолютной устойчивости**

Система Лурье с несколькими стационарными нелинейностями имеет вид

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j(\sigma_j), \quad \sigma_j = \langle c_j, x \rangle, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b_j, c_j \in \mathbb{R}^n,$$

где нелинейности  $\varphi_j(\sigma_j)$  удовлетворяют условиям существования абсолютно непрерывного решения  $x(t)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Система (1) абсолютно устойчива в классе  $N_\varphi$  нелинейностей  $\varphi =$

$\|\varphi_j\|_{j=1}^m$ , удовлетворяющих секторным ограничениям  $0 \leq \varphi_j \sigma_j \leq k_j \sigma_j^2$ ,  $j = 1, \dots, m$ , если эта система асимптотически устойчива в целом при любых таких нелинейностях.

### 3. Критерий Попова для систем с несколькими нелинейностями

Известный частотный критерий Попова является достаточным (при  $m = 1$  и необходимым) [2] условием существования для системы (1) функции Ляпунова, роль которой в данном случае выполняет ФЛП

$$(2) \quad v(x) = x^\top Lx + \sum_{j=1}^m \theta_j \int_0^{\sigma_j} \varphi_j(\xi) d\xi,$$

представляющая собой квадратичную форму ( $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L^\top = L$ ) плюс сумму интегралов от нелинейностей,  $\theta = \|\theta_j\|_{j=1}^m$  — вектор параметров,  $\{\cdot\}^\top$  — символ транспонирования матриц.

Частотное условие критерия Попова является результатом применения частотной теоремы к МН следующего вида:

$$(3) \quad \begin{pmatrix} A^\top L + LA & LB + A^\top C\theta/2 + C\mathcal{T}/2 \\ B^\top L + \theta C^\top A/2 + \mathcal{T} C^\top/2 & \theta C^\top B/2 + B^\top C\theta/2 - \mathcal{T} \end{pmatrix} < 0,$$

где  $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$ ,  $C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m)$ ,  $\theta = \text{diag}\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ,  $\mathcal{T} = \text{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ ,  $\tau_j > 0$ .

Наличие ФЛП (2) для системы (1) эквивалентно [4] разрешимости системы из  $2^m$  МН

$$(4) \quad I_s = A_s^\top L_s + L_s A_s < 0, \quad s = 1, \dots, N, \quad N = 2^m,$$

с матрицами  $A_s$  и  $L_s$  следующего вида:

$$A_s = A + \sum_{j=1}^m h_{sj} b_j c_j^\top, \quad L_s = L + \sum_{j=1}^m h_{sj} \frac{\theta_j}{2} c_j c_j^\top, \quad s = 1, \dots, N,$$

где  $h_s = \|h_{sj}\|_{j=1}^m$  и  $h_{sj}$  независимо принимают одно из двух значений: 0 или 1. Считаем, что  $h_1 = (0, \dots, 0)$ , т.е.  $A_1 = A$ ,  $L_1 = L$ .

Центральную роль в дальнейшем играет следующая теорема [5, 6].

**Теорема 1.** *Для выполнения системы двух МН*

$$(5) \quad I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad I_s = I_s^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n,$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , при котором выполнено одно неравенство*

$$I_1 + Q^+(\tilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\tilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^\top, \quad u^\pm(\varepsilon) = p \pm \frac{1}{\varepsilon} q.$$

Теорема о свертывании основана на теореме Пятницкого о переходе от системы из двух МН к одному МН, эквивалентному этой системе.

Основным результатом является доказательство с помощью теоремы 1 того, что из выполнения МН (3) следует выполнение системы (4). Собственно, необходимость из теоремы 1 нужна только при  $m = 1$ , чтобы показать, что в этом случае система (4) и МН (3) эквивалентны.

#### Список литературы

1. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). 2020. Saint-Petersburg, Russia. P. 762–768.
2. *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // *АиТ.* 1967. № 6. С. 5–30.
3. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры // *АиТ.* 2006. №10. С. 77–121.
4. *Каменецкий В.А.* Метод свертывания матричных неравенств и критерии абсолютной устойчивости стационарных систем управления // *АиТ.* 1989. № 5. С. 28–39.
5. *Каменецкий В.А.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // *АиТ.* 1983. № 12. С. 20–30.
6. *Каменецкий В.А.* Круговой критерий и критерий Цыпкина для систем с несколькими нелинейностями без использования S-процедуры // *Матем. сб.* 2024. Т. 215. № 2. С. 33–47.

### Popov's Criterion of Absolute Stability Without the S-Procedure

*V. A. Kamenetskiy*

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia  
vlakam@ipu.ru

Popov's criterion of absolute stability for Lurie systems with several stationary nonlinearities is obtained without the use of the S-procedure.

**Сравнение множеств при численном решении  
задач локализации**

*А. Н. Канатников<sup>1</sup>, О. С. Ткачева<sup>2</sup>, М. С. Виноградова<sup>1</sup>*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия<sup>1</sup>

ИПУ РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>

tkolga17@gmail.com

В работе предложен метод сравнения локализирующих множеств, построенных аналитически или численно с помощью функционального метода локализации. В основу положена мера (площадь, объем) разности множеств. Метод может быть полезен при сравнении множеств, которые заданы с помощью системы неравенств.

*Ключевые слова:* функциональный метод локализации, локализирующее множество, численные методы локализации

**1. Введение**

Функциональный метод локализации (ФМЛ) — удобный инструмент качественного анализа динамических систем, позволяющий строить множества в фазовом пространстве системы (локализирующие множества), содержащие все инвариантные компактные множества системы [1, 2]. Данный метод изначально строился на аналитических преобразованиях, но были разработаны и численные методы построения локализирующих множеств [3, 4], которые могут применяться, например, для уточнения построенных аналитически локализирующих множеств. Возникает задача оценки эффективности численных методов и их сравнения с аналитическими методами, т.е. сравнения множеств, построенных разными способами.

**2. Функциональный метод локализации**

Рассмотрим автономную динамическую систему  $\dot{x} = F(x)$ , где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Пусть  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$  — непрерывно дифференцируемая функция и  $\dot{\varphi}(x) = \varphi'(x)F(x)$  — ее производная в силу системы  $\dot{x} = F(x)$ . Подмножество  $S(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{\varphi}(x) = 0\}$  называют универсальным сечением. Для произвольного множества  $Q \subset \mathbb{R}^n$  положим  $\varphi_{\inf}(Q) = \inf\{\varphi(x) : x \in S(\varphi) \cap Q\}$ ,  $\varphi_{\sup}(Q) = \sup\{\varphi(x) : x \in S(\varphi) \cap Q\}$ .

**Теорема 1.** [1] Все инвариантные компакты системы  $\dot{x} = F(x)$ , целиком содержащиеся в множестве  $Q$ , содержатся в множестве

$$\Omega(\varphi, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{\inf}(Q) \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\}.$$

Множество  $\Omega(\varphi, Q)$  называют локализирующим для системы  $\dot{x} = F(x)$ , а функцию  $\varphi$ , порождающую это множество, — локализирующей.

Строить локализирующее множество можно с помощью последовательного применения ряда локализирующих функций. Рассмотрим последовательность функций  $\varphi_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  и некоторое множество  $Q \subset \mathbb{R}^n$ . Положим  $Q_0 = Q$ ,  $Q_k = \Omega(\varphi, Q_{k-1})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $Q_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ . Тогда  $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_\infty$  и, кроме того, все инвариантные компакты, целиком лежащие в  $Q$ , также содержатся в  $Q_\infty$ . Указанную процедуру называют итерационной [1].

Изначально метод базировался на аналитических преобразованиях. Позже для решения задач локализации были предложены и численные методы [3, 4]. Базовый алгоритм численного построения локализирующих множеств можно изложить в следующем виде [4]: 1) множество  $Q \subset \mathbb{R}^n$  накрывается равномерной сеткой с узлами; 2) для каждой локализирующей функции строится аппроксимация универсального сечения в виде семейства точек; 3) циклически строятся границы локализирующего множества с использованием последовательности локализирующих функций. Для корректного использования алгоритма необходимо, чтобы множество  $Q$  было ограниченным.

### 3. Сравнение множеств

При анализе точности алгоритмов численного построения локализирующих множеств, а также их эффективности как способа уточнения множеств, построенных аналитически, возникает задача сравнения множеств. Пусть аналитически получено локализирующее множество  $A$ , а с помощью численного алгоритма построено множество  $N$ . Первое представлено системой неравенств с использованием локализирующих функций, второе — также как система неравенств с теми же локализирующими функциями. Для сравнения множеств используем меру (площадь, объем) разностей множеств  $A \setminus N$  и  $N \setminus A$ . Чтобы оценить меру разностей множеств, в пространстве состояний системы строим регулярную сетку, гарантированно накрывающую оба множества  $A$  и  $N$ , и вычисляем количество узлов сетки, попадающих в нужное множество (т.е. узлов, удовлетворяющих соответствующей системе неравенств).

Если  $h$  — шаг регулярной сетки,  $n$  — размерность фазового пространства, то с каждым узлом регулярной сетки можно ассоциировать меру  $h^n$ . И мы получаем оценки  $\mu(A \setminus N) \approx S_{A \setminus N} h^n$ ,  $\mu(N \setminus A) \approx S_{N \setminus A} h^n$ , где  $S_X$  обозначает количество узлов регулярной сетки, попавших в множество  $X$ .

Здесь возникает два варианта. Если  $S_{N \setminus A} = 0$ , то  $S_{A \setminus N} = S_A - S_N$  и приближенно можно считать, что  $N \setminus A = \emptyset$ . Тогда множество  $N$  целиком содержится в множестве  $A$ . В этом случае величина  $(S_A - S_N)h^n$  будет характеризовать, насколько  $n$  лучше  $A$ . Случай  $S_{A \setminus N} = 0$  аналогичен предыдущему. Если  $S_{A \setminus N} \neq 0$ ,  $S_{N \setminus A} \neq 0$ , то можно считать, что ни одно из множеств не содержит другое. Сравнивая величины  $S_{A \setminus N}$  и  $S_{N \setminus A}$ , можно сделать вывод, какое из множеств  $A$  и  $N$  точнее.

Заметим, что в последнем случае как лучшую локализацию инвариантных компактов динамической системы можно рассматривать пересечение множеств  $A$  и  $N$ .

Предлагаемый метод может использоваться для сравнения любых множеств в конечномерном арифметическом пространстве, заданных системой неравенств. При этом необходимо, чтобы эти множества были ограничены.

### Список литературы

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Инвариантные компакты динамических систем. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.
2. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Функциональный метод локализации и принцип инвариантности Ла-Салля // Математика и математическое моделирование. 2021. № 1. С. 1–12.
3. Воржель А.А., Крищенко А.П. Численное исследование асимптотической устойчивости положений равновесия // Математика и математическое моделирование. 2017. № 3. С. 44–63.
4. Канатников А.Н., Ткачева О.С. О численных методах в задачах локализации // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 11. С. 1553–1561.

### Comparison of Sets in the Numerical Solution of Localization Problems

*A. N. Kanatnikov<sup>1</sup>, O. S. Tkacheva<sup>2</sup>, M. S. Vinogradova<sup>1</sup>*

BMSTU, Moscow, Russia<sup>1</sup>  
ICS RAN, Moscow, Russia<sup>2</sup>  
tkolga17@gmail.com

The paper proposes a method for comparing localizing sets constructed analytically or numerically using the functional localization method. It

is based on a measure (area, volume) of the difference between sets. The method can be useful when comparing sets defined by a system of inequalities.

---

УДК 519.21

## **Исследование устойчивости билинейных стохастических моделей компартментного типа**

*Р. Б. Каратов<sup>1</sup>, Е. С. Паламарчук<sup>2</sup>*

НИУ ВШЭ, Москва, Россия<sup>1</sup>

ЦЭМИ РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>

rbkaratov@hse.ru, e.palamarchuck@gmail.com

Проводится анализ асимптотического поведения решения стохастической билинейной системы, описывающей динамику популяций. Устанавливаются условия экспоненциальной сходимости к положению равновесия.

*Ключевые слова:* билинейная стохастическая система, устойчивость, SEIR модель

### **1. Введение**

В работе рассматривается модель динамики популяций в двух центрах (городах, регионах и т.д.) с учетом миграции и распределения индивидов по группам, соответствующим их эпидемиологическому статусу. Предполагается, что численность групп также подвержена влиянию случайных факторов, входящих в динамику мультипликативным образом. Анализируемая модель относится к классу т.н. SEIR-моделей, состоящих из эпидемиологических групп 4 типов:  $\mathcal{S}$  — подверженные заболеванию,  $\mathcal{E}$  — зараженные в инкубационном периоде,  $\mathcal{J}$  — заразные,  $\mathcal{R}$  — переболевшие. Перемещение индивида между группами происходит следующим образом:  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{R}$ . Для популяций в каждом из центров ( $i = 1, 2$ ) уравнения динамики имеют вид

$$dS_i(t) = -\beta_i \frac{S_i(t)I_i(t)}{N_i(t)} dt - k_{ij}S_i(t)dt + k_{ji}S_j(t)dt \\ + \frac{S_i(t)}{N_i(t)}(\sigma_1 E_i(t) + \sigma_2 I_i(t))dw(t),$$

$$dE_i(t) = -\beta_i \frac{S_i(t)I_i(t)}{N_i(t)} dt - k_{ij}E_i(t)dt + k_{ji}E_j(t)dt \\ - \frac{S_i(t)}{N_i(t)}\sigma_1 E_i(t)dw(t),$$

$$dI_i(t) = -\lambda E_i(t)dt - \gamma_i I_i(t)dt - l_{ij}E_j(t)dt + l_{ij}E_j(t)dt \\ - \frac{S_i(t)}{N_i(t)}\sigma_2 I_i(t)dw(t),$$

$$dR_i(t) = \gamma_i I_i(t)dt - k_{ij}R_i(t)dt + k_{ji}R_j(t)dt,$$

$$S_i(t) + E_i(t) + I_i(t) + R_i(t) = N_i(t),$$

$$S_i(0) = S_{i,0}, E_i(0) = E_{i,0}, I_i(0) = I_{i,0}, R_i(0) = R_{i,0},$$

где  $w(t)$  — стандартный одномерный винеровский процесс. Для параметров модели предполагается, что  $\beta_1, \beta_2 > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $k_{12} + k_{21} > 0$ ,  $l_{12} + l_{21} > 0$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  — некоторые константы. Также отметим, что представленная SEIR модель может быть получена в результате решения задачи оптимального управления, см. [1], когда параметры  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  выбираются исходя из минимизации критерия ожидаемых совокупных потерь. Ставится задача анализа асимптотического поведения решения при  $t \rightarrow \infty$ , включая исследование устойчивости. Также стоит подчеркнуть, что рассматриваемая система относится к классу билинейных стохастических систем ввиду наличия коэффициентов  $S_i(t)I_i(t)$ ,  $S_i(t)E_i(t)$  в уравнениях динамики.

## 2. Основной результат

Результаты о поведении решения модели сформулированы в следующем утверждении

**Лемма 1.** Если  $S_{i,0}, E_{i,0}, I_{i,0}, R_{i,0} > 0$ , то  $S_i(t), E_i(t), I_i(t), R_i(t) > 0$  с вероятностью 1 при  $t \geq 0$ . Также имеют место сходимости  $S_i(t) \rightarrow S_{i,\infty}$ ,  $E_i(t) \rightarrow 0$ ,  $I_i(t) \rightarrow 0$ ,  $R_i(t) \rightarrow R_{i,\infty}$ , почти наверное при  $t \rightarrow \infty$ . При этом  $k_{12}S_{1,\infty} = k_{21}S_{2,\infty}$ ,  $k_{12}R_{1,\infty} = k_{21}R_{2,\infty}$ .

Для оценки скорости сходимости к стационарному состоянию введем матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda - k_{12} & k_{21} & \beta_1 & 0 \\ k_{12} & -\lambda - k_{21} & 0 & \beta_2 \\ \lambda & 0 & -\gamma_1 - l_{12} & l_{21} \\ 0 & \lambda & l_{12} & -\gamma_2 - l_{21} \end{pmatrix}$$

и возмущенную матрицу  $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A} + \frac{\sigma^2}{2}\mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица,  $\sigma^2 = \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$ . Экспоненциальная устойчивость почти наверное (п.н.) для процесса  $X(t) = (E_1(t) E_2(t) I_1(t) I_2(t))^T$  означает, что существует неслучайная константа  $\kappa > 0$  (темп устойчивости), при которой  $\|X(t)\| \leq \kappa_0 e^{-\kappa(t-s)} \|X(s)\|$ , с вероятностью 1 при  $t \geq 0$  ( $\|\cdot\|$  — векторная норма),  $\kappa_0$  — п.н. конечная константа, зависящая от  $s$ , см. [2]. Доказан следующий результат.

**Теорема 1.** Если матрица  $\mathcal{A}_\sigma$  экспоненциально устойчива, то процесс  $X(t)$  экспоненциально устойчив почти наверное с темпом

$$\kappa = \frac{\mu_{\min}[(-\mathcal{A}_\sigma)^T D + D(-\mathcal{A}_\sigma)]}{\mu_{\max}[D]},$$

где  $D$  — диагональная матрица с элементами главной диагонали вида  $d_{ii} = z_i/y_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , вектора  $y = (-\mathcal{A}_\sigma)^{-1}\mathbf{1}_4$ ,  $z = (-\mathcal{A}_\sigma)^{-T}\mathbf{1}_4$ ,  $\mathbf{1}_4 = (1\ 1\ 1\ 1)^T$ ,  $^T$  — знак транспонирования,  $\mu_{\min}[\cdot]$  и  $\mu_{\max}[\cdot]$  обозначают минимальное и максимальное собственные числа матрицы.

Доказательство основано на применении функции Ляпунова вида  $V(x) = x^T D x$ . В условиях Теоремы 1 матрица  $\mathcal{A}_\sigma$  допускает представление  $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{M} + \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{M}$  — устойчивая матрица с неотрицательными элементами вне главной диагонали (матрица типа Метцлера),  $\mathcal{B}$  — матрица с неотрицательными элементами, поэтому условие устойчивости может быть сформулировано в стандартном для эпидемиологических моделей виде  $\mathcal{R}_0 < 1$ , где  $\mathcal{R}_0 = \mu_{\max}[-\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1}]$  — максимальное собственное значение матрицы  $-\mathcal{B}\mathcal{M}^{-1}$ , называемое индексом репродукции, см. [3].

### Список литературы

1. *Kang S., Hou X., Hu Y., Liu H.* Dynamic Analysis and Optimal Control of a Stochastic Information Spreading Model Considering Super-Spreader and Implicit Exposer With Random Parametric Perturbations // *Frontiers in Physics*. 2023. V. 11. P. 1194804.
2. *Khasminskii R.* Stochastic Stability of Differential Equations. New York: Springer, 2012.
3. *Diekmann O., Heesterbeek J.A.P., Roberts M.G.* The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models // *Journal of the royal society interface*. 2010. V. 7. No. 47. P. 873–885.

### On Stability of Bilinear Stochastic Compartment Models

*R. B. Karatov*<sup>1</sup>, *E. S. Palamarchuk*<sup>2</sup>

NRU HSE, Moscow, Russia<sup>1</sup>

CEMI RAS, Moscow, Russia<sup>2</sup>

rbkaratov@hse.ru, e.palamarchuk@gmail.com

An asymptotic study of the solution to a stochastic bilinear system that describes population dynamics is performed. The conditions for exponential convergence to an equilibrium are established.

---

## Вынужденные колебания нагруженной вращающейся шины с переменной длиной зоны контакта

*И. Ф. Кожевников*

ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия  
ikozhevnikov@frccsc.ru

На базе ранее предложенной аналитической модели радиальной шины исследуются ее вынужденные колебания в окрестности стационарного режима качения с учетом изменения длины зоны контакта (ЗК). Особенность предложенной аналитической модели шины состоит в том, что нет необходимости, базируясь на физических соображениях или интуиции, придумывать динамические граничные условия (ГУ), определяющие решение проблемы, так как эти условия получаются автоматически в результате применения вариационного принципа. В случае вынужденных колебаний с различными возмущающими частотами в горизонтальном и вертикальном направлениях найдены функции времени, определяющие динамические компоненты переменных границ ЗК. Также найдены формы колебаний нагруженной вращающейся шины, которые являются аналитическими решениями неоднородного дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющими кинематическим и динамическим ГУ.

*Ключевые слова:* радиальная шина, аналитическая модель, вынужденные колебания, переменная длина зоны контакта

Модель радиальной шины, позволяющая аналитически проанализировать динамические эффекты, возникающие при качении, была предложена в [1–5]. Предполагается, что механическая система состоит из двух частей: деформируемой и недеформируемой. Недеформируемой частью колеса является диск, который представляется абсолютно твердым телом, а деформируемой частью колеса является шина. В рамках модели поверхность шины представлена гибким бандажом и упругими боковинами, соединяющими бандаж с диском. В недеформированном состоянии боковины шины представляются частями двух торов и состоят из несжимаемой резины согласно модели Муни-Ривлина. Бандаж в недеформированном состоянии является круговым цилиндром. Предполагается, что бандаж армирован нерастяжимыми нитями, вследствие чего в деформированном состоянии бандаж остается цилиндрической поверхностью, представленной плоской деформированной срединной линией и семейством ортогональных ей пря-

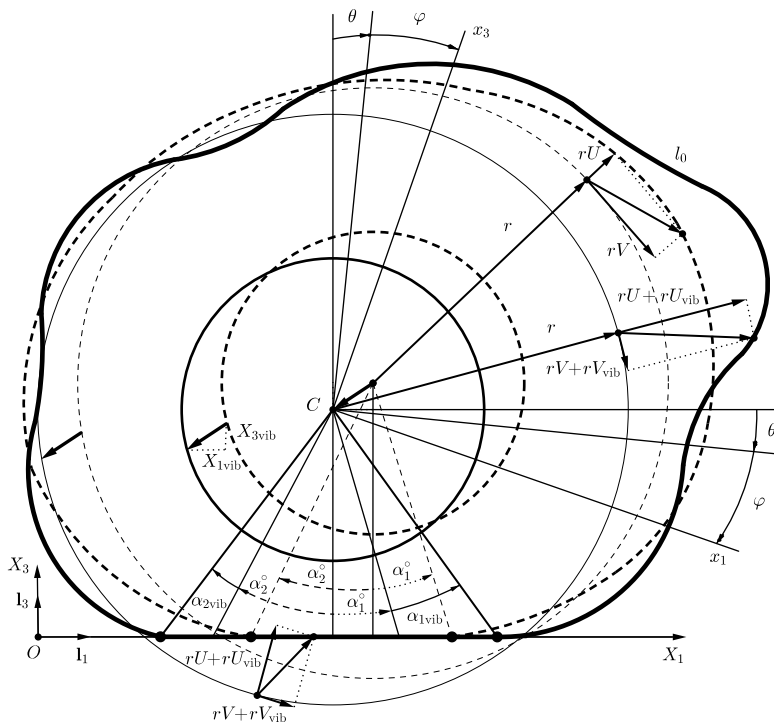


Рис. 1: Моделирование вынужденных колебаний катящейся шины с подвижными границами

мых. ЗК бандажа с опорной плоскостью представляется прямоугольником постоянной ширины и переменной длины, определяемой двумя функциями времени. В результате применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получается система уравнений движения, которая имеет следующую структуру: уравнения Лагранжа второго рода с неопределенными множителями, уравнения движения в частных производных, уравнения связей и динамические ГУ. Также учитываются кинематические ГУ. Вначале рассматривается стационарный режим качения нагруженной шины с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , а далее изучается проблема колебаний шины в окрестности этого режима. Рассматриваются вынужденные колебания с гармоническими возмущающими функциями с различными частотами в го-

ризонгальном и вертикальном направлениях. Аналитическое решение  $V_{\text{vib}}$  неоднородного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка, описывающего плоские радиальные колебания в окрестности стационарного режима качения, должно удовлетворять динамическим и кинематическим ГУ. Главная сложность заключается в том, что ГУ накладываются в граничных точках ЗК, которые сами заранее неизвестны: функции времени  $\alpha_{k \text{ vib}}(t)$ , определяющие динамические компоненты переменных границ ЗК, удовлетворяют дифференциальным уравнениям ( $k = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} & \left[ \left( (g_0 - n_{11})[U'']_k - (-1)^k [(\lambda^\circ)'(V'' + V)]_{l(k)} - (-1)^k [\lambda^\circ(V'' + V)]_{l(k)} \right) \cos \alpha_k^\circ - \right. \\ & \left. - \left( (g_0 - n_{12})[V'']_k + (-1)^k [(\lambda^\circ)']_{l(k)} \right) \sin \alpha_k^\circ + r \mu_{1k}^\circ \right] \alpha_{k \text{ vib}} - \\ & - \rho r^3 \Omega ([U']_k \cos \alpha_k^\circ - [V']_k \sin \alpha_k^\circ) \dot{\alpha}_{k \text{ vib}} = \rho r^3 \Omega [\dot{V}'_{\text{vib}}]_k \cos \alpha_k^\circ + \rho r^3 \Omega [\dot{V}_{\text{vib}}]_k \sin \alpha_k^\circ + \\ & + (g_0 - n_{11})[V''_{\text{vib}}]_k \cos \alpha_k^\circ + (g_0 - n_{12})[V'_{\text{vib}}]_k \sin \alpha_k^\circ + (-1)^k [\lambda_{\text{vib}}]_{l(k)} \sin \alpha_k^\circ + \\ & + (-1)^k [\lambda^\circ(V''_{\text{vib}} + V_{\text{vib}})]_{l(k)} \cos \alpha_k^\circ + (-1)^k [\lambda_{\text{vib}}(V'' + V)]_{l(k)} \cos \alpha_k^\circ, \quad g_0 = \rho r^3 \Omega^2 \end{aligned}$$

### Список литературы

1. *Vil'ke V.G., Kozhevnikov I.F.* A Model of a Wheel With a Reinforced Tyre // Moscow University Mechanics Bulletin. 2004. V. 59. No. 4. P. 1–10.
2. *Kozhevnikov I.F.* The Vibrations of a Free and Loaded Tyre // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. V. 70. No. 2. P. 223–228.
3. *Kozhevnikov I.F.* Vibrations of a Rolling Tyre // Journal of Sound and Vibration. 2012. V. 331. No. 7. P. 1669–1685.
4. *Kozhevnikov I.F.* Forced Vibrations of a Rolling Tyre // Wave Motion. 2022. V. 114. 103007.
5. *Kozhevnikov I.F.* Forced Vibrations of a Rolling Tyre With a Variable Contact Area Length // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46. No. 6. P. 2852–2865.

### Forced Vibrations of a Loaded Rotating Tyre With a Variable Contact Area Length

*I. F. Kozhevnikov*

FRC CSC RAS, Moscow, Russia  
 ikozhevnikov@frccsc.ru

We investigate forced vibrations of a loaded tyre rolling at constant speed with a variable contact area length. A previously proposed analytical model of a reinforced tyre is considered. The main feature is that the dynamic boundary conditions determining the solution of the problem

do not need to be invented, since they are obtained automatically as equations from the variational principle. The functions of time determining the dynamic components of a variable contact area boundaries are found. The mode shapes of loaded rotating tyre are determined analytically in the case of forced vibrations with harmonic input with different driving frequencies in horizontal and vertical directions as the analytical solutions of inhomogeneous partial differential equation of fourth order satisfying the kinematic and dynamic boundary conditions.

---

УДК 531.01

### **Взаимосвязь научных исследований в космической динамике и небесной механике**

*В. С. Королев, Е. Н. Поляхова, И. Ю. Потоцкая, Ю. Ю. Пупышева*

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия  
v.korolev@spbu.ru, pol@astro.spbu.ru, irinapototskaya@yandex.ru,  
j\_poupycheva@mail.ru

Отмечаются особенности взаимосвязи научных исследований космической динамики и небесной механики, а также влияние этих исследований на другие области естествознания. В рамках описания этой взаимосвязи дается обзор результатов исследовательских трудов научной школы Виктора Сергеевича Новоселова, посвященный 100-летию со дня его рождения.

*Ключевые слова:* оптимальное управление ИСЗ около положения равновесия, оптимальные межорбитальные переходы, уравнения космической динамики

Тесная взаимосвязь научных исследований в областях астрономии, математики и механики проявилась давно. Наблюдения звездного неба и теоретические обоснования движения естественных небесных объектов (таких как Луна, Солнце и звезды, планеты и их естественные спутники, кометы и астероиды) привели к открытию сил гравитационного взаимодействия, выводу законов Кеплера и Ньютона. Эти законы позволили исследовать динамику различных земных объектов. В свою очередь, открытие реактивных сил для земных механических систем переменного состава позволило моделировать движение искусственных небесных тел (ракет, космических аппаратов) и управлять

ими.

Влияние результатов исследований в космической динамике и небесной механике можно увидеть и в других областях естествознания, таких как биофизика, механика живых систем, мехатроника, теория робототехники. Развитие качественных аналитических и численных методов, их применение для решения сложных прикладных задач в перечисленных научных областях позволило получить ряд интересных результатов, представленных в научных исследованиях Виктора Сергеевича Новоселова (1926-2019) и последователей его научной школы.

Виктор Сергеевич начал свой научный путь в сложные послевоенные годы. Его наставниками были известные ученые в области теоретической и статистической физики, аналитической механики и аэрогидродинамики Ю.А. Крутков и Н.Н. Поляхов. После окончания ЛГУ (1951) Новоселов В.С. защитил диссертацию «Некоторые вопросы механики переменных масс» (1952). Теоремы динамики были распространены на механические системы переменного состава [1]. Это позволило уточнить уравнение Мещерского и обобщить уравнение Жуковского. Докторская диссертация «Некоторые вопросы неголономной механики» (1959) содержит ряд результатов для построения аналитических решений уравнений системы необходимых условий для оптимизации космических траекторий.

В 1961 г. В.С. Новоселов был избран заведующим кафедрой теоретической астрономии математико-механического факультета ЛГУ, позднее переименованной в кафедру небесной механики. В 1969 г. Виктор Сергеевич активно участвовал в создании факультета прикладной математики – процессов управления и кафедры механики управляемого движения, которую возглавлял до 1995 года. Основные направления исследований кафедры были связаны с космической динамикой. В монографии «Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях» (1972) построена общая схема решения задач оптимизации управляемого движения космических аппаратов [2]. Работы по этой тематике для классических способов управления и для управления с помощью солнечного паруса были продолжены его учениками и сотрудниками кафедры, например, в [3–6].

В разные годы В.С. Новоселов неоднократно обращался к исследованию управляемого движения систем при действии случайных возмущений или сил. Его личный вклад в науку определялся постоянным интересом к трудным и новым проблемам аналитической механики, управления движением механических систем и космической динамики.

Появлялись новые темы: квантовая механика и статистическая физика, биомеханика живых систем и нейродинамика. Новоселовым и его многочисленными научными последователями проводились исследования по аналитическим и численным алгоритмам динамики управляемого движения, гамильтоновым системам, методам численного интегрирования, оптимизации в нелинейных задачах механики. Методы, изначально разработанные представителями научной школы Новоселова для решения задач небесной механики и космической динамики, нашли применение в различных прикладных задачах, не имеющих непосредственного отношения к этим областям. Так, например, численные методы, полученные учеником Новоселова Л.К. Бабаджаняном, с успехом используются для идентификации параметров в сложных экологических и химических моделях [7].

Виктор Сергеевич Новоселов является автором более 240 работ. Среди них 16 монографий и учебных пособий. Результаты его исследований широко используются в курсах, читаемых в СПбГУ.

#### Список литературы

1. *Новоселов В.С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: ЛГУ, 1969.
2. *Новоселов В.С.* Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. Л.: ЛГУ, 1972.
3. *Полякова Е.Н., Шмыров А.С.* Математическое обоснование теории орбитальной коррекции, выполняемой с помощью солнечного паруса // Космические Исследования. 1989. Т. 27. № 1. С. 54–63
4. *Korolev V.S., Polyakhova E.N., Pototskaya I.Y.* Problems of Control Motion of Solar Sail Spacecraft in the Photogravitational Fields / In: Nonlinear Systems : Theoretical Aspects and Recent Applications. London: InTech, 2020.
5. *Бабаджанянц Л.К., Голубева Н.И., Новоселов В.С.* Оптимальное демпфирование быстрых линейных колебаний стационарного ИСЗ с маховиком / Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. 1973. Вып. 3.
6. *Babadzanjanz L.K., Korolev V.S., Pototskaya I.Yu., Pupyshva Yu.Yu.* Expenditure Optimal Control for a Satellite Moving Close to the Libration Point // Proceedings of 24th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2024. STEF92 Technology Ltd. V. 24 No. 6.1. P. 451–458.
7. *Babadzanjanz L., Boyle J., Sarkissian D., Zhu J.* Parameter Identification For Oscillating Chemical Reactions Modelled By Systems Of Ordinary Differential Equations // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering. 2002. V. 3. No. 2. P. 223–232.

## Interplay Between Space Dynamics and Celestial Mechanics Research

*V. S. Korolev, E. N. Polyakhova, I. Yu. Pototskaya, Yu. Yu. Pupyшева*

St. Petersburg State University, Russia  
v.korolev@spbu.ru, pol@astro.spbu.ru, irinapototskaya@yandex.ru,  
j\_poupycheva@mail.ru

The specific features of the relationship between scientific research in space dynamics and celestial mechanics are noted, as well as the influence of these studies on other fields of natural science. Within the framework of this relationship, an overview is provided of the research results from Victor Sergeevich Novoselov's scientific school, dedicated to the centenary of his birth.

---

УДК 517.977

### Управление по начальным данным в задаче с переменной структурой

*Н. А. Косинов, И. С. Максимова*

РУДН им. Патриса Лумумбы, Москва, Россия  
kosinov.n@gmail.com, irismax@yandex.ru

Доклад посвящен задаче управляемости с переменной структурой, в которой рассматривается использование управления по начальным данным. С помощью аппарата выпуклого анализа и теории управления на основе опорных функций получены условия управляемости по начальным данным в поставленной задаче.

*Ключевые слова:* управляемость, задача с переменной структурой, управление по начальным данным, множество достижимости

#### 1. Введение

В работе исследуется задача управляемости с переменной структурой, то есть движение объекта описывается двумя системами на последовательных интервалах времени. Причем рассматривается так называемое управление по начальным данным, когда в правую часть одной из систем явно управление не входит. Возникает необходимость поиска условий на начальное множество, при которых множество достижимо-

сти будет выпуклым. Это позволяет эффективно использовать аппарат выпуклого анализа для исследования управляемости.

## 2. Основной результат

Исследуем на управляемость систему, в которой объект сначала движется самостоятельно, а в нужный момент мы начинаем корректировать его курс.

Пусть движение объекта описывается системой

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, t), & t \in [t_0; t_g] \\ \dot{x} = Ax + Bu, & t \in [t_g; t_1] \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1, \end{cases}$$

где  $M_0, M_1$  — выпуклые компактные множества,  $t_0 < t_g < t_1 \in \mathbb{R}$  — заданные моменты времени. Допустимыми управлениями являются всевозможные измеримые функции  $u(\cdot)$  со значениями в выпуклом компактном множестве  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C \cap C^{1,1}(x, \cdot)$ ,  $\varphi$  — общее решение первого равенства (1),  $\mu_-, \mu_+$  — наименьшее и наибольшее собственные значения симметричной части матрицы первых производных  $Df(x, \cdot)$  функции  $f$  по  $x$ . Пусть также существуют константы  $\lambda_-, \lambda_+, L \in \mathbb{R}$  такие, что  $\forall(\tau, x)$

$$\lambda_- \leq \mu_- \leq \mu_+ \leq \lambda_+,$$

$$L \geq \limsup_{h \rightarrow 0, s \rightarrow \tau} \frac{\|Df(s, x+h) - Df(s, x)\|}{\|h\|}$$

а также обозначены

$$T = \begin{cases} 2\lambda_+ - \lambda_- & \text{если } t \geq t_0, \\ \lambda_+ - 2\lambda_- & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} |t - t_0| & \text{если } T = 0, \\ \frac{\exp(T|t - t_0|) - 1}{T} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда система (1) имеет решение  $u \in \mathcal{U}$ , если

$$\exists x_0 \in M_0, R \leq \frac{1}{K \times L} : \forall \psi \in S :$$

$$(2) \quad \begin{cases} c(M_0, \psi) - c(S_R(x_0), \psi) \geq 0, \\ c(\varphi(S_R(x_0), t_0, t_g), \psi) + c(M_1, -e^{(t_g - t_1)A^*} \psi) + \\ + \int_0^{t_1 - t_g} c(BU, e^{-sA^*} \psi) ds \geq 0 \end{cases}$$

где  $S$  — единичный шар.

Первое неравенство (2) означает, что мы выбрали шар малого радиуса в множестве начальных состояний; из второго неравенства следует, что образ этого шара на первом участке и множество управляемости на втором участке пересекаются.

### 3. Заключение

Полученные результаты могут быть применены в практических задачах для оценки принципиальной управляемости изучаемого объекта, для поиска оптимальных начальных и конечных состояний и времени переключения, в том числе с использованием компьютерных методов.

### Список литературы

1. Райсиг Г. Выпуклость множеств достижимости систем управления // *АиТ*. 2007. № 9. С. 64–78.
2. Роголев А.Н. Гарантированные оценки и построение множеств достижимости для нелинейных управляемых систем // *Вестник СибГАУ*. 2010. Вып. 5(31). С. 148–154.
3. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высш. шк., 2001.

### Control of Initial Conditions in a Variable Structure Problem

*N. A. Kosinov, I. S. Maksimova*

RUDN University, Moscow, Russia  
kosinov.n@gmail.com, irismax@yandex.ru

The talk is devoted to the controllability problem for a variable-structure system, which examines the use of initial data control. Using the tools of convex analysis and support function-based control theory, conditions for initial data controllability in the stated problem are obtained.

## Об устойчивости стационарных решений уравнений движения гиростата для аналога случая Лагранжа

А. А. Косов

ИДСТУ СО РАН им. В. М. Матросова, Иркутск, Россия  
kosov\_idstu@mail.ru

Рассматриваются уравнения движения гиростата под действием момента потенциальных и гироскопических сил. Получены достаточные условия существования четвертого первого интеграла для случая, аналогичного случаю Лагранжа. Выделены стационарные решения и получены условия их устойчивости по Ляпунову.

*Ключевые слова:* гириостат, аналог случая Лагранжа, перманентные вращения, устойчивость, метод связок Четаева

### 1. Введение

В динамике твердого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости, так и случаи частичной интегрируемости, когда удается получить дополнительный частный интеграл [1]. Исследования динамических свойств гириостатов с использованием первых интегралов остаются актуальными и продолжают [2]. В докладе будет представлен аналог классического случая Лагранжа для гириостата при действии момента потенциальных и гироскопических сил, зависящего от трех произвольных функций.

### 2. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим уравнения движения гириостата с неподвижной точкой под действием момента сил

$$(1) \quad I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda) \times \omega + M,$$

$$(2) \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega.$$

Здесь  $\omega$  — вектор угловой скорости,  $\gamma$  — единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат,  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3) > 0$  — матрица тензора инерции относительно неподвижной точки,  $\lambda$  — вектор гириостатического момента,  $M = M(t, \gamma, \omega)$  — вектор момента сил, действующих на гириостат. Будем рассматривать в качестве первых интегралов следующие функции

$$(3) \quad J_1 = J_1(\gamma, \omega) = \omega^T I \omega + 2U(\gamma) = c_1 = \text{const},$$

$$(4) \quad J_2 = J_2(\gamma, \omega) = \gamma^T(I\omega + \lambda) + V(\gamma) = c_2 = \text{const},$$

$$(5) \quad J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T \gamma = 1,$$

где  $U(\gamma)$  и  $V(\gamma)$  — некоторые непрерывно дифференцируемые функции.

Отметим, что геометрический интеграл (5) имеет место при любом выборе момента  $M = M(t, \gamma, \omega)$ . Но для того, чтобы у системы (1), (2) существовали интеграл энергии (3) и интеграл площадей (4), момент  $M = M(t, \gamma, \omega)$  не может быть произвольным, а должен удовлетворять определенным условиям. Эти необходимые и достаточные условия даются следующим утверждением.

**Утверждение 1.** *Для того, чтобы функции (3) и (4) были первыми интегралами для системы (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы момент  $M$  был представим в виде*

$$(6) \quad M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \times \omega + L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma,$$

где  $L(t, \gamma, \omega)$  — произвольная функция.

Данное утверждение показывает, что первые интегралы (3) и (4) определяют момент  $M$  в правой части (1) единственным образом с точностью до циркулярно-гироскопической составляющей  $L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma$ . Первые два слагаемых в формуле момента (6) представляют собой соответственно момент потенциальных сил  $\gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}$  с потенциалом  $U(\gamma)$  и момент гироскопических сил  $\frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \omega$ , определяемый функцией  $V(\gamma)$ .

### 3. Аналог случая Лагранжа

**Утверждение 2.** *Пусть для системы (1), (2), (6) выполняются условия:*

1.  $I_1 = I_2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ;
2.  $U(\gamma) = U(\gamma_3)$ ;
3.  $V(\gamma) = 0.5s(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \varphi(\gamma_3)$ , где  $s$  — некоторая постоянная, а  $\varphi(\gamma_3)$  произвольная непрерывно дифференцируемая функция;
4.  $L = L(\gamma_3)$  — произвольная непрерывная функция.

Тогда система (1), (2), (6) кроме интегралов (3)–(5) имеет дополнительный интеграл

$$J_4 = I_3 \omega_3 + \int_0^{\gamma_3} L(y) dy - s \gamma_3$$

и полностью интегрируема.

#### 4. Стационарные решения и достаточные условия их устойчивости

При условиях утверждения 2 система (1), (2) имеет следующие стационарные решения:

Состояния покоя:

$$(7) \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \sigma = \pm 1,$$

(8)

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \sqrt{1 - \eta^2} \cos \psi, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{1 - \eta^2} \sin \psi, \quad \gamma_3 = \eta,$$

где  $\eta$  есть вещественный корень уравнения с модулем не более 1, а  $\psi$  — параметр, подчиненный условиям  $0 \leq \psi < 2\pi$ .

Перманентные вращения:

$$(9) \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \sigma = \pm 1, \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = 0, \quad \bar{\omega}_3 = \sigma\Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R},$$

$$\bar{\gamma}_1 = \sqrt{1 - \theta^2} \cos \psi, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{1 - \theta^2} \sin \psi, \quad \gamma_3 = \theta, \quad \theta \in [-1, 1],$$

$$(10) \quad \bar{\omega}_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} \cos \psi, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_0 \sqrt{1 - \theta^2} \sin \psi, \quad \bar{\omega}_3 = \theta\omega_0,$$

где  $\theta$  и  $\psi$  — параметры, подчиненные условиям  $\theta \in [-1, 1]$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ , а  $\omega_0$  есть вещественный корень квадратного уравнения

$$(11) \quad (I_1 - I_3)\theta\omega_0^2 + (s\theta - \lambda_3 - \varphi'(\theta))\omega_0 + U'(\theta) = 0.$$

Для семейства перманентных вращений (9) величина угловой скорости  $\Omega$  может быть произвольной, а для семейства (10) каждой фиксированной паре  $(\theta, \psi)$  значений параметров может соответствовать не более двух возможных значений угловой скорости  $\omega_0$ .

**Утверждение 3.** Если выполнено условие  $\sigma U'(\sigma) < 0$ , то соответствующее состояние покоя (7) устойчиво по Ляпунову.

**Утверждение 4.** Если выполнено условие  $U''(\eta) > 0$ , то каждое состояние покоя из семейства (8) устойчиво по Ляпунову.

**Утверждение 5.** Среди семейства перманентных вращений (10) устойчивыми по Ляпунову будут те, для которых выполняется условие  $(I_3 - I_1)\Omega^2 + (\lambda_3\sigma - s + \sigma\varphi'(\sigma))\Omega - \sigma U'(\sigma) > 0$ .

В докладе будут представлены также необходимые условия устойчивости стационарных решений, полученные на основе анализа характеристического уравнения для системы линейного приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Проект № 126021016902-8).

### Список литературы

1. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. *Lanchares V., Iñarra M., Pascual A., Elipe A.* Stability Conditions for Permanent Rotations of a Heavy Gyrostat with Two Constant Rotors // Mathematics. 2022. V. 10. Paper No. 1882.

### On the Stability of Stationary Solutions of the Equations of Motion of a Gyrostat for an Analogue of the Lagrange Case.

*A. A. Kosov*

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Irkutsk, Russia  
kosov\_idstu@mail.ru

The equations of motion of a gyrostat under the torque of potential and gyroscopic forces are considered. Sufficient conditions for the existence of the fourth first integral are obtained for a case analogous to the Lagrange case. Stationary solutions are identified, and the conditions for their Lyapunov stability are derived.

---

УДК 534.113+537.213

### Программное управление изгибом упругой консоли в электрическом поле

*Г. В. Костин*

ИПМех РАН, Москва, Россия  
kostin@ipmnet.ru

Изучается изгиб тонкой прямоугольной проводящей упругой балки (консоли) над заземленным основанием. Консоль, управляемая подаваемым на нее электрическим напряжением, закреплена на одном конце и шарнирно оперта на некотором расстоянии от свободного конца. Ставится задача перевода покоящейся, недеформированной консоли в конечное состояние статического изгиба. Построено движение консоли для выбранного класса программного управления.

*Ключевые слова:* упругая балка, электрическое поле, динамические системы, метод конечных элементов, программное управление

## 1. Описание математической модели консоли

Целью работы является моделирование управляемого изгиба ультратонкой проводящей консоли, размеры которой соответствуют элементам быстродействующих микрооптических электромеханических систем [1]. Традиционные актюаторы (например, пьезоэлектрические [2]) неприменимы для таких систем из-за ограничений по масштабу. Это создает потребность в методах управления, основанных на прямом воздействии специально сформированного электромагнитного поля.

Недеформированная консоль имеет форму прямоугольного параллелепипеда длины  $\ell$ , ширины  $2b$  и высоты  $2h$ . Материал упругой консоли проводящий, однородный и изотропный с модулем Юнга  $E$  и плотностью  $\rho$ . С торца тело жестко закреплено на плоскости  $Oyz$  декартовой системы координат  $Oxyz$ . В отсчетном состоянии срединная поверхность консоли расположена симметрично плоскости  $Oxz$  на высоте  $z = d$  параллельно  $Oxy$ . Тело опирается на ось  $x = a \wedge z = d - h$ .

На поверхность консоли подается переменный во времени  $t$  электрический потенциал  $V(t)$ . На проводящем основании  $z = 0$  поддерживается нулевой потенциал. В качестве задачи управления рассматривается перевод тела, притягиваемого к основанию, из нулевого состояния в терминальное статическое состояние в момент времени  $t = T$ .

Вне тела электрический потенциал  $U_e(\mathbf{r}, t)$  определяется в квазистатическом приближении, где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор пространственной точки. Допустим, что перемещения малы, и рассмотрим плоский изгиб консоли в рамках балочной теории Эйлера–Бернулли. Тогда перемещения срединной линии тела  $w(x, t)$  допустимы лишь вдоль оси  $z$ . Притяжение консоли к основанию рассчитывалось с помощью метода конечного элемента в зависимости от размеров поперечного сечения и высоты подъема  $d + w$ .

Выбраны геометрические параметры: длина  $\ell = 25$  мкм, пролет между заделкой и опорой  $a = 19$  мкм, полуширина  $b = 250$  нм, полувысота  $h = 85$  нм, высота срединной плоскости  $d = 1.8$  мкм. Физические параметры: диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_a = 8.859 \cdot 10^{-12}$  Ф/м, плотность  $\rho = 3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 70$  ГПа. Далее перейдем к безразмерным переменным, вводя характерные длину  $x_* = 1$  мкм, время  $t_* = 1$  мкс, массу  $m_* = 1$  г, электрическое напряжение  $V_* = 1$  мВ.

## 2. Приближенные уравнения и управление изгибом

Кинетическая и потенциальная энергии консоли с существенными краевыми и однородными начальными условиями запишется в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} K_d &= 2bh\rho \int_0^\ell w_t^2 dx, & U_d &= \frac{4Ebh^2}{3} \int_0^\ell w_{xx}^2 dx + U_f, \\ U_f &= \varepsilon_a V^2 \int_0^\ell \left( c_1 \ln(d+w) - \frac{c_2}{d+w} \right) dx, \end{aligned}$$

$$w(0, t) = w_x(0, t) = w(a, t) = w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0.$$

Коэффициенты  $c_1 = 0.228$  и  $c_2 = 0.339$  определяют притяжение балки к основанию и оценены при решении задачи Лапласа относительно  $U_e$ .

Цель управления — перевод консоли в статическое состояние  $\bar{w}(x)$  при некоем напряжении  $V_T$ . Это состояние находится из условия минимума потенциальной энергии  $U_s[\bar{w}] = U_d[\bar{w}]_{V(t)=V_T} \rightarrow \min_{\bar{w}}$  с учетом краевых условий из (1), где в  $U_d$  заменили  $w(x, t)$  на  $\bar{w}(x)$ . Для решения задачи статического изгиба использовались кусочно-полиномиальные сплайны  $\tilde{w} = \mathbf{w}^T \mathbf{b}(x)$ , где  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$  — вектор параметров изгиба, а  $\mathbf{b} : (0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}^N$  — вектор базисных функций. Часть потенциальной энергии  $U_f$ , порожденная электрическим полем, стремится к минус бесконечности при смещении точек консоли вниз. Статическое равновесие возможно только при наличии у электромеханического потенциала  $U_s$  локального минимума. Для рассматриваемого в статье примера установлено, что локальный минимум существует, если электрический потенциал меньше критического  $|V_T| < V^* \approx 68.35$ .

Для построения движения выберем изгиб в форме сплайнов по  $x$ , в котором вместо постоянного вектора  $\mathbf{w}$  подставляется вектор-функция времени  $\mathbf{w} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , т.е.  $\tilde{w} = \mathbf{w}^T(t) \mathbf{b}(x)$ . Используя (1), составим лагранжиан системы  $L(t, \mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t)) = K_d - U_d$  и запишем задачу Коши

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}}, \quad \mathbf{p}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{w}}}, \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{p}(0) = 0.$$

Терминальный электрический потенциал, подаваемый на консоль положим равным  $V_T = 65$ . Чтобы не возбуждать упругие колебания [3], выберем достаточно большое время управления  $T \gg T_1$ , где  $T_1$  — период низшей моды колебаний около нулевого положения. Для численного примера зафиксируем  $T = 10T_1 \approx 7.6$ ,  $N = 15$ . Выбирается гладкий закон управления  $V^2(t) = V_T^2 \left( 3T^{-2}t^2 - 2T^{-3}t^3 \right)$ . Как показывает

численное моделирование для выбранных параметров предложенное управление электрическим напряжением  $V$  приводит консоль в состояние, которое близко к терминальному статическому изгибу. Для уточнения позиционирования можно использовать более сложный закон программного управления или применить стабилизирующий регулятор по обратной связи.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-11-00333), <https://rscf.ru/project/25-11-00333/>.

#### Список литературы

1. *Lychev S. et al.* Deformations of Single-Crystal Silicon Circular Plate: Theory and Experiment // *Symmetry*. 2024. V. 16. No. 2. P. 137.
2. *Гавриков А.А., Костин Г.В.* Изгибные колебания упругого стержня, управляемого пьезоэлектрическими силами // *Прикладная математика и механика*. 2023. Т. 87, № 5. С. 801–819.
3. *Костин Г.В.* Динамика управляемых вращений нагруженного упругого звена в манипуляционной системе с электромеханическим приводом // *Изв. АН СССР. Тех. кибернетика*. 1989. № 6. С. 130–138.

### Feedforward Control of the Bending of an Elastic Cantilever in Electric Field

*G. V. Kostin*

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
[kostin@ipmnet.ru](mailto:kostin@ipmnet.ru)

The bending of a thin rectangular elastic beam (cantilever) over a grounded base is studied. The cantilever controlled by an applied electric voltage is clamped at an end and with a hinged support at some distance from the free end. The problem is to transfer the resting undeformed cantilever to a terminal state of static bending. The cantilever motion is constructed for the selected class of feedforward control.

---

## Управление асинхронным двигателем в генераторном режиме

*С. А. Кочетков*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
kos@ipu.ru

Как известно электродвигатели могут работать в различных режимах, таких как двигательный, режим торможения противовключением, генераторный режим, режим рекуперации энергии. Для асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором работа в генераторном режиме недостаточно рассмотрена в литературе. В статье предлагается один из вариантов управления таким объектом для генерации энергии заряда аккумуляторной батареи, подключенной параллельно с конденсаторной нагрузкой электродвигателя. Базовый закон управления синтезирован на одной из модификаций так называемого «вихревого» алгоритма, обеспечивающего инвариантность к неизвестной нагрузке.

*Ключевые слова:* асинхронный электродвигатель с короткозамкнутым ротором, генераторный режим, вихревой алгоритм

### 1. Введение

В статье рассматривается транспортное средство с одним асинхронным электродвигателем с короткозамкнутым ротором в качестве тягового привода. В качестве бортовой системы питания используется аккумуляторная батарея со сглаживающими конденсаторами, которые в статье объединены одним конденсатором с емкостью  $C$ . Обмотки статора асинхронного электродвигателя соединены в «звезду». Преобразование напряжения с аккумуляторной батареи осуществляется с использованием силового инвертора с шестью транзисторами, с помощью которых осуществляется подключение свободных концов обмоток фаз либо к общему проводу, либо к плюсу аккумуляторной батареи.

Существует множество методов управления подобным тяговым приводом в режиме двигателя [1–4], что нельзя сказать о законах обеспечивающих регулирование входного напряжения и тока зарядки аккумуляторной батареи в генераторном режиме работы. В данной работе рассматривается синтез закона управления, обеспечивающего регулирование входного напряжения ключевого преобразователя (выходного напряжения асинхронного генератора) при определенных условиях движения транспортного средства.

## 2. Основной результат

Дифференциальные уравнения рассматриваемого объекта управления в подвижной системе координат, связанной с потокосцеплением ротора (в  $(d\_q)$ -координатной системе)

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \left[ \frac{3}{2} k_r p \psi_d I_q + M_g \right], \\
 \omega_{\psi} &= \frac{d\varphi_{\psi}}{dt} = p\omega + k_r R_r \frac{I_q}{\psi_d}, \\
 \frac{du_0}{dt} &= -\frac{u_0}{R_L C} - \frac{I_d u_{ud} + I_q u_{uq}}{2C}, \\
 \dot{\psi}_d &= \frac{1}{T_r} (-\psi_d + L_m I_d), \\
 \dot{I}_d &= -\frac{k_s}{T_s} I_d + \omega_{\psi} I_q + \frac{k_r}{\sigma L_s T_r} \psi_d + \frac{u_0}{3} \frac{u_{ud}}{\sigma L_s}, \\
 \dot{I}_q &= -\omega_{\psi} I_d - \frac{k_s}{T_s} I_q - p\omega \frac{k_r}{\sigma L_s} \psi_d + \frac{u_0}{3} \frac{u_{uq}}{\sigma L_s},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения ротора электродвигателя,  $\omega_{\psi}$  — частота вращения поля ротора,  $M_g > 0$  — внешний момент генератора,  $\psi_d, \psi_q$  — компоненты потокосцепления ротора,  $I_d, I_q$  — компоненты тока статора,  $u_{ud}, u_{uq}$  — компоненты управляющего вектора напряжения ( $u_{ud}^2 + u_{uq}^2 = 4$ ),  $u_0$  — напряжение на конденсаторе (АКБ),  $u_0/R_L$  — ток заряда аккумуляторной батареи,  $p$  — число пар полюсов,  $k_s, k_r, T_s, L_s, T_r, \sigma, L_m, L_r, C, J, R_L$  — известные параметры, переменные  $\omega, \omega_{\psi}, u_0, \psi_d, \psi_q, I_d, I_q$  доступны измерению.

Ставится задача поддержания заданного уровня напряжения на выходе асинхронного генератора

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u_0 - u_0^*| = 0,
 \tag{2}$$

где  $u_0^* = \text{const} > 0$  — желаемый уровень напряжения на выходе генератора.

Рассмотрим выбор управляющих воздействий для системы (1).

Управляющее воздействие  $u_{ud}$  используется, чтобы обеспечить некоторый желаемый уровень потока ротора

$$I_d^* = \frac{\psi_d^*}{L_m},
 \tag{3}$$

где  $\psi_d^* > 0$  – желаемый поток ротора.

Вводя новую переменную

$$\bar{I}_d = I_d - I_d^*$$

и дифференцируя ее с учетом (1), (3), получим

$$\dot{\bar{I}}_d = -\frac{k_s}{T_s} I_d + \omega_\psi I_q + \frac{k_r}{\sigma L_s T_r} \psi_d - \dot{I}_d^* + \frac{u_0}{3} \frac{u_{ud}}{\sigma L_s}.$$

Выберем управляющее воздействие  $u_{ud}$ , чтобы обеспечить экспоненциальную сходимость переменной  $\bar{I}_d$  к нулю

$$(4) \quad u_{ud} = \text{sat} \left( \frac{3}{u_0} \left[ \frac{k_s \sigma L_s}{T_s} I_d - \sigma L_s \omega_\psi I_q - \frac{k_r}{T_r} \psi_d + \sigma L_s \dot{I}_d^* - k_d \bar{I}_d \right] \right),$$

где  $\text{sat}(\cdot)$  – функция насыщения

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1; \\ x, & -1 < x < 1; \\ -1, & x \leq -1. \end{cases}$$

$k_d = \text{const} > 0$  – коэффициент обратной связи.

Для выбора второго управления выберем фиктивное управление согласно равенству

$$I_d u_{ud} + I_q u_{uq} = -2 \frac{u_0^*}{R_L}.$$

Вводя новую переменную

$$y = I_q u_{uq} + I_d u_{ud} + 2 \frac{u_0^*}{R_L}$$

и дифференцируя ее, получим

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{I}_q u_{uq} + I_q \dot{u}_{uq} + \dot{I}_d u_{ud} + I_d \dot{u}_{ud} = \\ &= \dot{I}_q u_{uq} + I_q \dot{u}_{uq} + \dot{I}_d u_{ud} + \frac{3I_d}{u_0} \left[ \frac{k_s \sigma L_s}{T_s} \dot{I}_d - \sigma L_s \omega_\psi \dot{I}_q - \frac{k_r}{T_r} \dot{\psi}_d + \sigma L_s \ddot{I}_d^* - k_d \dot{\bar{I}}_d \right] = \\ &= \left[ -\omega_\psi I_d - \frac{k_s}{T_s} I_q - p\omega \frac{k_r}{\sigma L_s} \psi_d + \frac{u_0}{3} \frac{u_{uq}}{\sigma L_s} \right] u_{uq} + I_q \dot{u}_{uq} + \\ &+ \left[ -\frac{k_s}{T_s} I_d + \omega_\psi I_q + \frac{k_r}{\sigma L_s T_r} \psi_d + \frac{u_0}{3} \frac{u_{ud}}{\sigma L_s} \right] u_{ud} + \\ &+ \frac{3I_d}{u_0} \left[ \frac{k_s \sigma L_s}{T_s} \dot{I}_d - \sigma L_s \omega_\psi \dot{I}_q - \frac{k_r}{T_r} \dot{\psi}_d + \sigma L_s \ddot{I}_d^* - k_d \dot{\bar{I}}_d \right] = \\ &= \xi(t) + I_q \dot{u}_{uq}. \end{aligned}$$

Выберем управляющее воздействие  $u_{uq}$  в виде динамического звена

$$u_{uq} = -\text{sat} \left( \int M \text{sign}(I_q y(\tau)) d\tau \right).$$

При выполнении условия

$$|I_q| M > \xi(t)$$

переменная  $y$  за конечное время сойдется к нулю [3], что приводит к замкнутой системе

$$\frac{du_0}{dt} = -\frac{u_0}{R_L C} + \frac{u_0^*}{R_L C},$$

что гарантирует решение поставленной задачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (Проект № 20-01-00363А).

### Список литературы

1. *Dodds J.S., Utkin V.A., Vittek J.* Sensorless Induction Motor Drive with Independent Speed and Rotor Magnetic Flux Control. Part 1. Theoretical Background // J. Electrical Eng. 1998. V. 49. P. 186–193.
2. *Harnefors L., Hinkkanen M., Luomi J.* Reduced-Order Flux Observers With Stator-Resistance Adaptation for Speed-Sensorless Induction Motor Drives // IEEE transactions on power electronics. 2010. V. 45. No. 5. P. 1173–1183.
3. *Utkin V.I., Guldner J., Shi J.* Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. London: Taylor and Francis, 2009.
4. *Leonhard W.* Control of Electrical Drives. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

### Control of asynchronous drive in energy generation mode

*S. A. Kochetkov*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia  
kos@ipu.ru

It is well known, electric drives can operate in various modes, such as motor mode, counter-braking mode, generator mode, energy recovery mode. For an asynchronous motor with a squirrel-cage rotor, operation in generator mode has not been sufficiently discussed in the literature. The article proposes one of the options for controlling such an object to generate charging energy for a battery connected in parallel with the capacitor load of the electric motor. The basic control law is synthesized using one of the

modifications of the so-called “vortex” algorithm, which ensures invariance to an unknown load.

---

УДК 531.36

**О стационарных движениях шара, находящегося между двумя вращающимися сферами с вязким трением**

*А. А. Кошелев, Е. И. Кугушев, Т. В. Шахова*

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
koshelev030698@yandex.ru, kugushev@keldysh.ru, t.shahova@yandex.ru

Рассматривается задача о движении тяжелого шара, находящегося между концентрическими равномерно вращающимися вокруг своих неподвижных осей симметрии сферами. В точках контакта шара со сферами на шар действуют силы линейного вязкого трения. Найдены стационарные движения шара.

*Ключевые слова:* линейное вязкое трение, вращающиеся сферы, стационарные движения шара

**1. Введение**

На работу сферического шарнира могут влиять попавшие между его рабочими поверхностями посторонние микроскопические частицы (пыль, песок и т. п.). В связи с этим представляет интерес вопрос о перемещении таких частиц. В простейшей постановке предполагает, что частица имеет сферическую форму, и формулируется задача о движении тяжелого шара, находящегося между двумя концентрическими равномерно вращающимися вокруг своих неподвижных осей симметрии сферами. Шар опирается на сферы двумя своими точками, причем в этих точках на него действуют силы линейного вязкого трения.

**2. Уравнения движения шара**

Тяжелый шар массы  $m$  и радиуса  $a$  движется между двумя концентрическими сферами с радиусами  $R - a$  и  $R + a$ , соприкасаясь с каждой из них. Сферы вращаются вокруг своих неподвижных осей симметрии с постоянными угловыми скоростями  $\Omega_i = \Omega_i e_i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $e_i$  — единичные направляющие векторы этих осей, выбранные так, что  $\Omega_1 > 0$  и  $\langle e_1, e_2 \rangle \geq 0$ . В точках контакта шара со сферами на шар действуют силы линейного вязкого трения  $F_i = -c_i v_i^{\text{отн}}$ , где  $c_i$  — коэффициент

трения,  $\mathbf{v}_i^{\text{отн}}$  — скорость точки шара, соприкасающейся с  $i$ -й сферой, относительно этой сферы. Центр масс шара совпадает с его геометрическим центром, центральный тензор инерции шаровой, центральный момент инерции шара равен  $I = \sigma ma^2$ , где  $\sigma = \text{const} > 0$ .

Введем неподвижную систему координат  $Oxyz$  с началом в центре сфер, направив ось  $Oz$  вертикально вверх. Пусть  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор центра шара,  $\mathbf{v}$  — его скорость,  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость шара. В безразмерных переменных  $\tau = \Omega_1 t$ ,  $\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{R}$ ,  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{R\Omega_1}$ ,  $\mathbf{w} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\Omega_1}$  уравнения движения шара имеют вид

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\rho}' &= \mathbf{v}, \\
 \mu \mathbf{v}' &= -\mu g(\mathbf{e}_z - \langle \mathbf{e}_z, \boldsymbol{\rho} \rangle \boldsymbol{\rho}) - \mu \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \boldsymbol{\rho} - (1+k)\mathbf{v} + \\
 (1) \quad &+ (-s(1-k)\mathbf{w} + (1-s)\mathbf{e}_1 + k\chi(1+s)\mathbf{e}_2) \times \boldsymbol{\rho}, \\
 \sigma \mu s \mathbf{w}' &= (1-k)\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{v} - \\
 &- \boldsymbol{\rho} \times ((s(1+k)\mathbf{w} + (1-s)\mathbf{e}_1 - k\chi(1+s)\mathbf{e}_2) \times \boldsymbol{\rho}).
 \end{aligned}$$

Здесь  $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\tau}$ ,  $g = \frac{g}{\Omega_1^2 R}$ ,  $k = \frac{c_2}{c_1}$ ,  $\mu = \frac{m\Omega_1}{c_1}$ ,  $\chi = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ ,  $s = \frac{a}{R} < 1$ .

### 3. Стационарные движения

Решениям системы (1) вида  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{w} = \text{const}$  отвечают стационарные движения шара, при которых его центр покоится в абсолютном пространстве, а угловая скорость шара постоянна, при этом векторы  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\mathbf{w}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
 -\mu g(\mathbf{e}_z - \langle \mathbf{e}_z, \boldsymbol{\rho} \rangle \boldsymbol{\rho}) + (-s(1-k)\mathbf{w} + (1-s)\mathbf{e}_1 + k\chi(1+s)\mathbf{e}_2) \times \boldsymbol{\rho} &= 0, \\
 \boldsymbol{\rho} \times ((s(1+k)\mathbf{w} + (1-s)\mathbf{e}_1 - k\chi(1+s)\mathbf{e}_2) \times \boldsymbol{\rho}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда находим  $\mathbf{w} = -\frac{(1-s)\mathbf{e}_1 - k\chi(1+s)\mathbf{e}_2}{s(1+k)} + \lambda \boldsymbol{\rho}$ , где  $\lambda = \text{const}$ , и получаем уравнение для положений равновесия центра шара

$$(2) \quad -\mu g(\mathbf{e}_z - \langle \mathbf{e}_z, \boldsymbol{\rho} \rangle \boldsymbol{\rho}) + \frac{2k}{1+k} \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho} = 0,$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = (1-s)\mathbf{e}_1 + \chi(1+s)\mathbf{e}_2 = \Omega \mathbf{e}$ ,  $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$ . Уравнение вида (2) рассматривалось в [1], где изучались положения равновесия тяжелой точки на вращающейся вокруг своей неподвижной оси симметрии сфере при наличии силы линейного вязкого трения.

В проекциях на оси  $Oxyz$  уравнение (2) запишется в виде

$$(3) \quad \begin{aligned} \varkappa(e_y \rho_z - e_z \rho_y) &= -\rho_x \rho_z, & \varkappa(e_z \rho_x - e_x \rho_z) &= -\rho_y \rho_z, \\ \varkappa(e_x \rho_y - e_y \rho_x) &= 1 - \rho_z^2, \end{aligned}$$

где  $\varkappa = \frac{2k\Omega}{\mu g(1+k)} \geq 0$ . При  $\varkappa \neq 0$ ,  $e_z \neq 0$ ,  $\rho_z \neq 0$  разрешая первое и второе уравнения системы (3) относительно  $\rho_x$  и  $\rho_y$ , находим

$$\rho_x = \frac{\varkappa \rho_z}{\rho_z + \varkappa^2 e_z} (\varkappa e_x e_z - e_y \rho_z), \quad \rho_y = \frac{\varkappa \rho_z}{\rho_z + \varkappa^2 e_z} (\varkappa e_y e_z + e_x \rho_z).$$

Тогда из третьего уравнения системы (3)

$$\rho_z = \pm \sqrt{\frac{1 - \varkappa^2 + \sqrt{(1 - \varkappa^2)^2 + 4\varkappa^2 e_z^2}}{2}}.$$

При  $\varkappa = 0$  из системы (3) получаем  $\rho_x = \rho_y = 0$ ,  $\rho_z = \pm 1$ . Значит, положения равновесия центра шара лежат на вертикальной оси  $Oz$  и  $\mathbf{\Omega} = 0$ .

При  $\varkappa \neq 0$ ,  $\rho_z = 0$  из первых двух уравнений системы (3) следует  $e_z = 0$ . Значит, положения равновесия центра шара лежат в горизонтальной плоскости  $Oxy$  и вектор  $\mathbf{\Omega}$  горизонтален. Третье уравнение системы (3) принимает вид  $\varkappa(e_x \rho_y - e_y \rho_x) = 1$  и означает, что  $\varkappa \mathbf{e} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{e}_z$ . Тогда  $\sin(\widehat{\mathbf{e}, \boldsymbol{\rho}}) = 1/\varkappa$ , положения равновесия существуют при  $\varkappa \geq 1$  и

$$\rho_x = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\varkappa^2}} e_x - \frac{1}{\varkappa} e_y, \quad \rho_y = \frac{1}{\varkappa} e_x \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\varkappa^2}} e_y.$$

Отметим, что при  $\varkappa = 1$  радиус-вектор центра шара в положении равновесия и вектор  $\mathbf{\Omega}$  ортогональны.

При  $\varkappa \neq 0$ ,  $\rho_z \neq 0$ ,  $e_z = 0$  из системы (3) получаем

$$\rho_x = -\varkappa e_y, \quad \rho_y = \varkappa e_x, \quad \rho_z = \pm \sqrt{1 - \varkappa^2}.$$

В этом случае вектор  $\mathbf{\Omega}$  горизонтален, положения равновесия центра шара существуют при  $0 < \varkappa < 1$  и лежат в вертикальной плоскости, содержащей ось  $Oz$  и ортогональной вектору  $\mathbf{\Omega}$ .

## Список литературы

1. *Шалимова Е.С.* Стационарные и периодические режимы в задаче о движении тяжелой точки по вращающейся сфере при наличии вязкого трения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2014. № 4. С. 43–50.

### **On the Steady Motions of a Ball Located between Two Rotating Spheres with Viscous Friction**

*A. A. Koshelev, E. I. Kugushev, T. V. Shakhova*

Lomonosov Moscow State University, Russia  
koshelev030698@yandex.ru, kugushev@keldysh.ru, t.shahova@yandex.ru

The problem of the motion of a heavy ball located between concentric spheres uniformly rotating around their fixed axes of symmetry is considered. At the points of contact between the ball and the spheres linear viscous friction forces act on the ball. The steady motions of the ball are found.

---

УДК 519.85

### **Двухэтапный метод маршрутизации на основе динамического программирования для планирования уборки космического мусора**

*В. С. Кравченко<sup>1</sup>, А. В. Иванюхин<sup>1,2</sup>*

НИИ ПМЭ МАИ, Москва, Россия<sup>1</sup>

РУДН им. Патриса Лумумбы, Москва, Россия<sup>2</sup>  
einboesgenie@gmail.com, ivanyukhin.a@yandex.ru

Рассмотрена задача определения маршрута для удаления объектов космического мусора. На основе двух классических задач: задачи о рюкзаке и задачи коммивояжера. На основе задачи о рюкзаке происходит предварительный отбор наиболее опасных объектов, между которыми строится маршрут перемещения с помощью задачи коммивояжера. В качестве примера рассмотрены несколько миссий по уводу наиболее опасных объектов космического мусора.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, дискретное математическое программирование, задача о рюкзаке, задача коммивояжера

## 1. Введение

Рост количества объектов космического мусора на околоземных орбитах представляет собой одну из наиболее серьезных долгосрочных угроз для устойчивой космической деятельности. По данным команд контроля космического пространства количество отслеживаемых фрагментов размером более 10 см превышает 23 тысячи, состоящих из нерабочих аппаратов, разгонных блоков и их фрагментов. Это создает риски для действующих космических аппаратов и пилотируемых миссий. Среди возможных мер решения проблемы ключевое значение имеет активное удаление объектов космического мусора на орбиты захоронения, что требует разработки специальных миссий для КА-буксиров с облетом множества объектов.

Целью исследования является разработка двухэтапного алгоритма, позволяющего эффективно определять оптимальные маршруты перелета за счет значительного сокращения пространства поиска на этапе отбора целей при сохранении общей эффективности миссии.

## 2. Отбор целей

Первый этап метода направлен на формирование целевого списка объектов космического мусора для последующего сбора. Отбор целей производится на основе индекса опасности (ценности) объекта [1] и оценке затрат на увод объекта (характеристической скорости) [2].

Задача формализуется как задача о рюкзаке, где решение оптимизируется по критерию суммарной «ценности» отобранных объектов при ограничении на суммарные затраты  $\Delta V$ . То есть

$$(1) \quad \begin{array}{l} \text{Максимизировать} \\ \text{При условиях} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ \sum_{i=1}^n w_i^{(k)} x_i \leq W^{(k)}, \quad k = 1, \dots, m \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n \end{array}$$

где индекс  $i$  соответствует объекту космического мусора;  $v_i$  — ценность (индекс опасности); выбор переменных  $w_i$  — вес (затраты характеристической скорости для перевода на орбиту захоронения).

Для решение задачи используется метод решения на основе динамического программирования с полиномиальной схемой приближения (FPTAS). Эта схема аппроксимации использует округление ценности объектов до дискретного набора значений с точностью  $\varepsilon$ , что приводит

к вычислительной сложности ограниченной полиномом от  $1/\varepsilon$ . Этот алгоритм может найти решение за полиномиальное время, которое будет отличаться не более чем  $(1-\varepsilon)$  от оптимального решения [3].

### 3. Построение маршрута

Второй этап использует подмножества из  $N$  объектов, отображенных на первом этапе, решает задачу построения оптимальной последовательности их облета на основе задачи коммивояжера. То есть

$$\begin{aligned}
 & \text{Минимизировать} && \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ij} x_{ij} \\
 (2) \quad & \text{При условиях} && \sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, N \\
 & && \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

где индексы  $i$  и  $j$  соответствует объектам космического мусора;  $w_{ij}$  — затраты характеристической скорости для прелета от  $i$  к  $j$  и перевода  $j$  на орбиту захоронения.

Для решения этой задачи также используется динамическое программирование и аналогичная аппроксимационная схема с округленными значениями затрат (координат городов).

### 4. Заключение

Ключевой проблемой в планировании миссий по уводу космического мусора является оптимизация маршрута космического буксира-сборщика. В данной работе предлагается двухэтапный оптимизационный метод, призванный преодолеть противоречие между полнотой и вычислительной сложностью. Этот метод имеет глубокую алгоритмическую проработку и обладает внутренним параллелизмом, что позволяет эффективно реализовать его с помощью современных вычислительных технологий.

Работа методики продемонстрирована на ряде тестовых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-79-30009), <https://rscf.ru/project/25-79-30009/>.

### Список литературы

1. *Kravchenko V.S., Ivanukhin A.V.* Optimization of Space Debris Removal Sequence Using Dynamic Programming With Hazard Index Consideration // IFAC-PapersOnLine. 2025. V. 59. № 20. P. 1736–1741.

2. *Лебедев В.Н.* Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
3. *Vazirani V.V.* Approximation Algorithms. Springer, 2001.

## **A Two-Stage Routing Method Based on Dynamic Programming for Space Debris Removal Mission Planning**

*V. S. Kravchenko*<sup>1</sup>, *A. V. Ivanyukhin*<sup>1,2</sup>

RIAME MAI, Moscow, Russia<sup>1</sup>

RUDN university, Moscow, Russia<sup>2</sup>

einboesen@genie@gmail.com, ivanyukhin.a@yandex.ru

The problem of optimizing transfer routes for the removal of space debris objects is considered. The approach is based on two classical problems: the knapsack problem and the traveling salesman problem. The knapsack problem is used for preliminary selection of the most hazardous objects, followed by route construction between them using the traveling salesman problem. Several missions for deorbiting the most hazardous space debris objects are examined as illustrative examples.

---

УДК 531.36

### **Общий метод строгого решения задач стабилизации конфигураций систем с геометрическими связями при неполной информации**

*А. Я. Красинский*

МАИ, Москва, Россия

krasinsk@mail.ru

На основе полученной методами аналитической механики строгой нелинейной модели с использованием теории критических случаев получено достаточное условие разрешимости общей задачи стабилизации заданной конфигурации систем с геометрическими связями при неполной информации.

*Ключевые слова:* геометрические связи, уравнения с множителями, стабилизация, неполная информация

Аналитическая форма модели динамики систем с геометрическими связями необходима для эффективного применения методов тео-

рии управления к разработке алгоритмов управления параллельными манипуляторами. Применяемое в технической практике моделирование увеличивает размерность модели и исключает возможность получения ее аналитической формы. В данной работе переходом к уравнениям в избыточных координатах получена аналитическая модель, размерность которой сокращена на удвоенное число связей. В общей задаче стабилизации заданной конфигурации при неполной информации использованием теории критических случаев размерности соответствующих линейно-квадратичных задач дополнительно сокращены: достаточно рассмотрения управляемой подсистемы, содержащей первое приближение лишь уравнений для независимых координат.

Динамика системы с  $n + m$  координатами (штрих означает транспонирование)  $q' = (r, s)'$ ;  $r' = (q_1, \dots, q_n)'$ ;  $s' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})'$ , кинетической энергией  $T(q, \dot{q})$ , потенциальной энергией  $\Pi(q)$ , находящейся под действием непотенциальных сил  $Q'(q, \dot{q})' = (Q_r, Q_s)'$ ;  $Q'_r(q, \dot{q}) = (Q_1, \dots, Q_n)'$ ;  $Q'_s(q, \dot{q}) = (Q_{n+1}, \dots, Q_{n+m})'$  (среди которых могут быть управляющие),  $m$  геометрическими связями  $F(q) = 0$ ;  $\frac{\partial F}{\partial s} \neq 0$ ;  $F'(q) = (F_1, \dots, F_m)'$ ; описывается уравнениями  $(L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - \Pi(q))$

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q + \left( \frac{\partial F(q)}{\partial q} \right)' \lambda; \quad F(q) = 0;$$

Исключение множителей из модели (1) размерности  $2n + 3m$  (в отличие от [1–3]) проводится [4, 5] либо определением множителей с помощью дважды продифференцированных уравнений связей, либо решением обратной задачи кинематики. При любом из этих подходов получение аналитической формы модели невозможно.

Эффективный способ [2] исключения множителей: разрешением проварьированные уравнения связей относительно вариаций зависимых координат модель (1) делится на два уравнения (вторая строка в (3)) для независимых и зависимых координат. Выражая из уравнения для зависимых координат множители связей, подставляя полученные выражения в уравнения для независимых координат, получаем уравнения без множителей. Исключая из этих уравнений  $\dot{s}$  с помощью продифференцированных один раз уравнений связей, имеем (последняя строка в (2)) аналитическую форму математической модели динамики несвободной системы размерности  $2n - m$ :

$$\begin{aligned}
\delta s &= -B(q)\delta r; & B(q) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right); \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= Q_r - B'(q)\lambda; & \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= Q_s + \lambda; \\
(2) \quad \lambda &= \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} - Q_s; & \dot{s} &= -\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\dot{r} = B(q)\dot{r}; \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= Q_r - B'(q)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} - Q_s\right); \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L^*}{\partial r} &= Q_r^* + B'(q)\left(\frac{\partial L^*}{\partial s} + Q_s^*\right); & \dot{s} &= B(q)\dot{r}.
\end{aligned}$$

Здесь через  $L^*(q, \dot{r})$  и  $Q^*(q, \dot{r})$  обозначены результаты исключения зависимых скоростей из  $L(q, \dot{q})$  и непотенциальных сил.

В задаче стабилизации положения равновесия  $r = r_0$ ,  $s = s_0$  введением возмущений  $r = r_0 + x$ ,  $s = s_0 + y$ , система уравнений возмущенного движения после выделения критической переменной заменой  $z = y - B(0, 0)x$  и ее характеристическое уравнение приводятся к виду (матрицы  $a, b, h$  выражаются известным образом [3])

$$(3) \quad \begin{aligned}
\dot{x} &= x_1; & \dot{x}_1 &= ax + bx_1 + hz + X_1^{(2)}(x, x_1, z); & \dot{z} &= B^{(1)}(x, z)x_1; \\
\lambda^m [E_n \lambda^2 - b\lambda - (a + hB(0, 0))] &= 0;
\end{aligned}$$

При отрицательности действительных частей ненулевых корней характеристического уравнения невозмущенное движение асимптотически устойчиво [3]. Обеспечение такого расположения корней гарантирует стабилизацию невозмущенного движения до асимптотической устойчивости. Размерность аналитической формы модели позволяет включить исполнительные приводы: в общей задаче стабилизации при неполной информации, вводя еще и  $k$ -вектор переменных привода  $w = w_0 + v$ , полный фазовый вектор  $\xi_1' = (x, x_1, v, y)'$ ,  $l$ -вектор измерения  $\sigma = C\xi$ ;  $\xi' = (x, x_1, v)$  и  $r$ -вектор управления  $u$ , можно получить математическую модель системы при неполной информации с учетом переходных процессов приводов

$$(4) \quad \dot{\xi}_1 = N\xi + Vu + Sz + \Xi^{(2)}, \quad \dot{z} = B^{(1)}(x, z)x_1.$$

**Теорема 1.** Если для системы (4) выполнены условия

$$(5) \quad \begin{aligned} \text{rank}(V \quad NV \quad N^2V \quad \dots N^{2n+k-1}V) &= 2n + k, \\ \text{rank}(C' \quad N'C' \quad (N')^2C' \quad \dots N'^{2n+k-1}C') &= 2n + k, \end{aligned}$$

то существуют такие матрицы  $K, L$ , что линейное управление

$$(6) \quad u = K\hat{\xi}$$

стабилизирует невозмущенное движение до асимптотической устойчивости по всем переменным.

Доказательство следует из того, что для управляемой подсистемы

$$\dot{\xi} = N\xi + Vu; \quad \dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + L(C\hat{\xi} - \sigma) + Vu$$

при условии (5) решением соответствующих линейно-квадратичных задач можно определить управление (6), обеспечивающее отрицательность действительных частей всех ненулевых корней характеристического уравнения замкнутой этим управлением нелинейной системы (4).

#### Список литературы

1. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.-Л.: ОГИЗ. 1946.
2. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании // Тр. Среднеазиатского ун-та им. В.И. Ленина. 1958. Вып. 144. Ташкент: Изд-во САГУ.
3. Krasinskiy A.Ya. On the Analytical Mechanics Methods in Mathematical Modeling the Dynamics Systems With Geometric Constraints // Mechanical Engineering Advances. 2025. V. 3. No. 2. P. 2512.
4. Brinker J, Corves B, Wahle M. Comparative Study of Inverse Dynamics Based on Clavel's Delta Robot / In: Proceedings of the 14th IFToMM World Congress, 25-30 October 2015, Taipei, Taiwan.
5. Muller A., Kumar S., Kordik T. A Recursive Lie-Group Formulation for the Second-Order Time Derivatives of the Inverse Dynamics of Parallel Kinematic Manipulators // IEEE Robotics and Automation Letters. 2023. V. 8. No. 6. P. 3804–3811.

# A General Method for Rigorously Solving Stabilization Configurations Problems of Systems With Geometric Constraints Under Incomplete Information

*A. Y. Krasinskiy*

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia  
krasinsk@mail.ru

Based on a rigorous nonlinear model obtained by analytical mechanics methods of and using the critical cases theory, a sufficient condition for the solvability of the general stabilization problem a given configuration of systems with geometric constraints under incomplete information is obtained

---

УДК 62-501.2

## Синтез динамической обратной связи в системах слежения на основе канонической формы с неопределенным входом

*Д. В. Краснов, А. В. Уткин*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
dim93kr@mail.ru, utkin-av@rambler.ru

Для одноканальных систем слежения канонического вида формализованы условия компенсации возмущения, когда множитель управления не известен, и алгоритм настройки кусочно-линейных корректирующих воздействий наблюдателя, восстанавливающего с заданной точностью смешанные переменные по измерениям ошибки слежения без всплесков оценочных сигналов.

*Ключевые слова:* системы с неопределенным входом, линеаризация обратной связью по выходу, наблюдатель возмущений, сатуратор

Рассматривается проблема синтеза следящих систем для одноканальных объектов автоматического управления, функционирующих в условиях воздействия внешних и параметрических несогласованных возмущений, предполагаемых гладкими функциями времени, ограниченными вместе со своими производными. Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание выходной (регулируемой) переменной  $y(t) \in R$  эталонной траектории

$y_{\text{ref}}(t) \in R$ . Стандартный подход состоит в приведении математической модели объекта управления к канонической форме вход–выход, где выходом является ошибка слежения  $e_1 = y - y_{\text{ref}}$ .

Ограничимся рассмотрением класса систем, в которых относительный порядок равен размерности объекта управления  $n \in N$  инвариантно по отношению к наличию внешних возмущений [1] и входные каналы управления не зависят от переменных состояния. Тогда после  $n$  дифференцирований ошибки слежения в силу модели объекта управления будет получена эквивалентная каноническая форма, где управление  $u \in R$  появится только в последнем уравнении

$$(1) \quad \dot{e}_i = e_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{e}_n = \psi(t) + b(t)u, \quad b(t) \neq 0, \quad |\psi(t)| \leq F, \quad t \geq 0,$$

где  $e_{i+1} \in R$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  — смешанные переменные (функции от переменных состояния исходной системы, внешних воздействий и их производных),  $|e_i(t)| \leq E_i$ ,  $\psi(t)$  — смешанное ограниченное возмущение, параметр  $b(t)$  точно не известен. Задача слежения сводится к стабилизации канонической системы (1) и решается в рамках метода линеаризации обратной связью по выходу. Прямым измерениям доступна только ошибка слежения. Показано, что если в системе (1) множитель управления представим в виде суммы двух слагаемых

$$(2) \quad \begin{aligned} b(t) &= b_0(t) + \Delta b(t) \neq 0, \quad b_0(t) \neq 0, \quad t \geq 0, \\ \text{sign}(b_0(t)) &= \text{sign}(b_0(t) + \Delta b(t)) \Rightarrow |\Delta b(t)/b_0(t)| < 1, \end{aligned}$$

где  $b_0(t)$  — номинальная определенная часть, значение  $\Delta b(t)$  точно не известно, но ограничено известными константами, то тогда для системы (1) по измерениям ошибки слежения можно построить физически реализуемый наблюдатель смешанных переменных и линеаризовать ее с помощью комбинированного управления

$$(3) \quad u = -(c_1 e_1 + c_2 \tilde{e}_2 \dots + c_n \tilde{e}_n + \tilde{e}_{n+1}(t)) / b_0(t),$$

где  $c_i = \text{const} > 0$  — коэффициенты эталонного гурвицева полинома

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + c_n \lambda^{n-1} + \dots + c_2 \lambda + c_1, \quad \lambda_i \in C : \text{Re } \lambda_i < 0, \quad i = \overline{1, n};$$

$v = \min\{-\text{Re } \lambda_i\}_{i=\overline{1, n}} > 0$  — запас устойчивости,  $e_{n+1} = \psi + \Delta b u$  — обобщенное возмущение,  $|e_{n+1}(t)| \leq E_{n+1}$ ,  $t \geq 0$ ;  $\tilde{e}_i(t)$  — оценки смешанных переменных  $e_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , полученные с заданной точностью  $|e_i(t) - \tilde{e}_i(t)| \leq \delta$ ,  $t \geq T > 0$ ,  $i = \overline{2, n+1}$  с помощью наблюдателя.

В замкнутой системе (1),(3) вида

$$(4) \quad \dot{e}_i = e_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{e}_n = \dot{e}_n = -(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) + \phi(t)$$

обеспечивается стабилизация с точностью до обобщенной ошибки оценивания  $\phi(t)$ :  $\|e(t)\| \leq |\phi(t)|/v$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Покажем, что ее можно сделать сколь угодно малой и восстановить смешанные переменные и возмущение по измерениям ошибки слежения с помощью наблюдателя  $n$ -го порядка, т.е. увеличив динамический порядок замкнутой системы только в два раза. Наблюдатель строится на основе системы (1)

$$(5) \quad \dot{z}_i = z_{i+1} + v, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{z}_n = b_0(t)u + v_n,$$

где  $z_i \in R$  — переменные состояния наблюдателя,  $z_i(0) = 0$ ,  $v_i \in R$  — кусочно-линейные корректирующие воздействия вида

$$(6) \quad v_1 = M_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} M_1 \text{sign}(\varepsilon_1), & |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ M_1 l_1 \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| \leq 1/l_1, \end{cases} \quad \varepsilon_1 = e_1 - z_1,$$

$$v_i = M_i \text{sat}(l_i v_{i-1}), \quad M_i, l_i = \text{const} > 0, \quad i = \overline{2, n}.$$

Задача наблюдения сводится к стабилизации системы, записанной относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_i = e_i - z_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$(7) \quad \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - v, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \dot{\varepsilon}_n = e_{n+1}(t) - v_n.$$

**Теорема 1.** Если в системе (6)–(7) возмущение  $e_{n+1}(t)$  и его производная ограничены известными константами

$$|e_{n+1}(t)| \leq E_{n+1}, \quad |\dot{e}_{n+1}(t)| \leq \overline{E}_{n+1}, \quad t \geq 0,$$

то можно за конечное время  $T > 0$  обеспечить стабилизацию ошибок наблюдения и их производных с любой заданной точностью  $\delta > 0$ :

$$|\varepsilon_i(t)| = |e_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{1, n}, \quad |\dot{\varepsilon}_n(t)| = |e_{n+1}(t) - v_n(t)| \leq \delta, \quad t > T$$

при следующем выборе коэффициентов коррекции:  $M_i > E_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $l_1 = p_1/M_1$ ,  $l_2 = p_2/(M_2 M_1 l_1)$ ,  $\dots$ ,  $l_n = p_n/(M_n M_{n-1} l_{n-1} \dots M_1 l_1)$ , где  $p_i > 0$  — коэффициенты эталонного гурвицева полинома

$$\prod_{i=1}^n (\lambda - \bar{\lambda}_i) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n, \quad \bar{\lambda}_i \in C : \text{Re } \bar{\lambda}_i < 0, \quad i = \overline{1, n}$$

с запасом устойчивости  $\min\{-\text{Re } \bar{\lambda}_i\}_{i=\overline{1, n}} \geq \max\{E_{n+1}/\delta, \overline{E}_{n+1}/\delta, v\}$ .

В системе (1) с наблюдателем (5)–(6) управление (3) реализуется в виде  $u = -(c_1 e_1 + c_2 z_2 \dots + c_n z_n + v_n) / b_0(t)$ .

Отличия наблюдателя (5)–(6) от стандартного наблюдателя с линейными корректирующими воздействиями  $v_1 = p_1 \varepsilon_1, \dots, v_n = p_n \varepsilon_1$  [2] следующие: 1) размерность наблюдателя (5)–(6) равна размерности наблюдаемой системы (1), так как оценкой обобщенного возмущения служит корректирующее воздействие последнего уравнения  $v_n(t) \approx e_{n+1}(t)$ ; 2) ограниченные корректирующие воздействия (6) не допускают всплесков оценочных сигналов в переходных процессах; 3) можно реализовать больший запас устойчивости с меньшими коэффициентами усиления.

### Список литературы

1. *Краснов Д.В., Уткин А.В.* Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // Управление большими системами. 2017. № 69. С. 29–49.
2. *Khalil H.K., Praly L.* High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2014. V. 24. No. 6. P. 993–1015.

### Synthesis of Dynamic Feedback in Tracking Systems Based on Canonical Form with Uncertain Input

*D. V. Krasnov, A. V. Utkin*

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia  
dim93kr@mail.ru, utkin-av@rambler.ru

For single-channel tracking systems of canonical form, conditions for disturbance compensation under an uncertain control multiplier are formalized. A simple setup is proposed for piecewise linear corrective actions of the observer, reconstructing mixed variables and disturbance with a given accuracy from tracking error measurements without spikes in the estimated signals.

---

## Динамика модели хищник-жертва с квадратичной зависимостью скорости смертности хищников

А. П. Крищенко, Р. Д. Шестаков

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия  
apkri@bmstu.ru, shestakovrd@student.bmstu.ru

Исследуется модель системы хищник-жертва, описанная трехмерной системой дифференциальных уравнений. Найдены граничные положения равновесия и условия их устойчивости, а также условия существования внутренних положений равновесия. Построена итерационная последовательность локализующих множеств и доказана их компактность, положительная инвариантность и существование аттрактора. Найдены условия устойчивости в целом для нулевого положения равновесия.

*Ключевые слова:* локализующее множество, положительно инвариантное множество, аттрактор, итерационная последовательность, устойчивость

### 1. Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений [1]

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = ry \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - (m + \mu - c_1)x - c \frac{x^2}{d+x}, \\ \dot{y} = mx - a \frac{yz}{d_1+y} - \delta y, \\ \dot{z} = a_1 \frac{yz}{d_1+y} - \nu z^2, \end{cases}$$

где все параметры системы положительны, причем  $c_1 < c$ , а переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответствующие плотностям популяций подрастающих жертв, взрослых жертв и хищников, неотрицательны.

Для данной системы найдены условия существования и устойчивости граничных положений равновесия, а также условия существования хотя бы одного внутреннего положения равновесия.

С помощью метода локализации инвариантных компактов (МЛИК) построено локализующее множество, доказано существование аттрактора, найдены условия устойчивости в целом нулевого положения равновесия.

## 2. Метод локализации

В данной работе использованы следующие результаты МЛМК.

**Теорема 1** ([2]). *Все инвариантные компакты системы  $\dot{x} = f(x)$ ,  $f(x) \in C^1$ , содержащиеся в множестве  $Q$ , содержатся в локализующем множестве*

$$\Omega(\varphi, Q) = \{\varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q)\} \cap Q,$$

$$\text{где } S(\varphi, Q) = \{\dot{\varphi}(x) = 0\} \cap Q, \quad \varphi_{\sup}(Q) = \sup_{S(\varphi, Q)} \varphi(x).$$

*Расширенные локализующие множества* [3]

$$\Omega(\varphi, Q, \epsilon) = \{\varphi(x) \leq \varphi_{\sup}(Q) + \epsilon\} \in Q,$$

где  $\epsilon \geq 0$ , также содержат все инвариантные множества системы.

## 3. Основные результаты

**Теорема 2.** *При  $c_1 < t + \mu$  все инвариантные компакты системы (1) содержатся в множествах*

$$K_1 = \{x \leq x_1 = k\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3, \quad K_2 = \{x \leq x_1, y \leq y_1 = \frac{m}{\delta}x_1\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3,$$

$$K_3 = \{x \leq x_1, y \leq y_1, z \leq z_1 = \frac{a_1 y_1}{\nu(d_1 + y_1)}\} \cap \mathbb{R}_{+,0}^3,$$

причем множество  $K_3$  компактно.

**Теорема 3.** *При  $c_1 < t + \mu$  множество  $K_3$  положительно инвариантно и содержит аттрактор системы.*

**Теорема 4.** *При  $c_1 < t + \mu$  компактное множество*

$$K_* = \{0 \leq x \leq x_*, 0 \leq y \leq y_*, 0 \leq z \leq z_*\},$$

где

$$x_* = \max\{-\Delta \frac{k\delta}{rm}, 0\}, \quad \Delta = t + \mu - c_1 - \frac{rm}{\delta}, \quad y_* = \frac{mx_*}{\delta}, \quad z_* = \frac{a_1 y_*}{\nu(d_1 + y_*)},$$

положительно инвариантно, содержит аттрактор системы и при  $\Delta \geq 0$  вырождается в точку  $E_0(0, 0, 0)$ .

#### 4. Положения равновесия

**Теорема 5.** Система имеет следующие положения равновесия:

1.  $E_0(0; 0; 0)$  — существует всегда, устойчиво в целом при  $\Delta \geq 0$  и неустойчиво при  $\Delta < 0$ ;
2.  $E_1(x_1, \frac{m}{\delta}x_1, 0)$ , где  $x_1$  — положительный корень уравнения

$$x^2 + \left( \frac{ck\delta}{rm} + d + \frac{k\delta}{rm}\Delta \right) x + \frac{k\delta}{rm}\Delta d = 0,$$

существует при  $\Delta < 0$ , неустойчиво всегда;

3.  $E_i(x_i, y_i, z_i)$ , где  $x_i = \frac{aa_1y_i^2}{m\nu(d_1 + y_i)^2} + \frac{\delta y_i}{m}$ ,  $z_i = \frac{a_1y_i}{\nu(d_1 + y_i)}$ ,  $y_i$  — положительный корень уравнения

$$A_1y^6 + A_2y^5 + A_3y^4 + A_4y^3 + A_5y^2 + A_6y + A_7 = 0,$$

и хотя бы одно такое положение равновесия существует тогда и только тогда, когда  $\Delta < 0$ .

#### Список литературы

1. Eric M. Takyi, Kasey Cooper, Ava Dreher, Caroline McCrorey The (De)Stabilizing Effect of Juvenile Prey Cannibalism in a Stage-Structured Model // Mathematical Biosciences and Engineering. 2023. V. 20. No. 2. P. 3355–3378.
2. Крищенко А.П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 12. С. 1669–1676.
3. Крищенко А.П. Итерационные последовательности метода локализации // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 11. С. 1460–1470.

#### Dynamics of Predator-Prey Model With Quadratic Predator Mortality

A. P. Krishchenko, R. D. Shestakov

Bauman Moscow State Technical University, Russia  
apkri@bmstu.ru, shestakovrd@student.bmstu.ru

A predator-prey model described by a three-dimensional system of differential equations is investigated. Boundary equilibrium points and conditions of their stability, as well as conditions of the existence of interior

equilibrium points, are found. An iterative sequence of localizing sets and a compact extended localizing set are constructed, its positive invariance and the existence of an attractor are proven. Conditions of global stability of zero equilibrium point are found.

---

УДК 681.5.01

## **Стабилизация и уклонение от перехвата по обратной связи на основе барьерных и управляющих функций Ляпунова**

*К. А. Ласточкин, А. И. Глуценко*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
lastconst@ipu.ru, aiglush@ipu.ru

В работе предложен нелинейный закон управления на основе барьерных и управляющих функций Ляпунова, локально решающий задачу асимптотической стабилизации состояний линейной системы в заданном неподвижном эллипсоиде с одновременным уклонением от перехвата подвижным эллипсоидом.

*Ключевые слова:* обратная связь, стабилизация, уклонение

### **1. Введение**

Автономное движение мобильных роботов предполагает взаимодействие с препятствиями. Более того, искусственные препятствия могут располагать информацией о цели робота и противодействовать ее достижению. Следовательно, необходимо решать проблему автономного уклонения от перехвата такими препятствиями.

Применение алгоритмов с высокой вычислительной сложностью для планирования траектории на борту робота может быть затруднительно [1], поэтому были предложены законы на основе обратной связи, позволяющие одновременно стабилизировать систему и избежать столкновения с препятствиями: метод потенциальных полей [1], навигационных функций [1], барьерных и управляющих функций Ляпунова [2]. Данная работа посвящена развитию метода [2] и распространению его результатов на случай наличия одного препятствия, цель которого — перехват робота по пропорциональному закону навигации.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — измеряемое состояние,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  — вход системы,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — матрицы системы, пара  $(A, B)$  управляема.

В фазовом пространстве для всех  $t \geq t_0$  зададим эллипсоиды

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathcal{O}(t) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - c_1(t))^\top R_1 (x - c_1(t)) \leq 1 \right\}, \\ \mathcal{E} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - c_2)^\top R_2 (x - c_2) \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

где  $R_i = R_i^\top > 0$  для  $i = 1, 2$ ,  $c_1(t) \in \mathbb{R}^n$  и  $c_2 = 0_n$ .

Также будем полагать, что производная  $\dot{c}_1(t)$  является линейной функцией от состояний системы (1), то есть

$$(3) \quad \dot{c}_1(t) = K_1(x(t) - c_1(t)), \quad c_1(t_0) = c_{10}.$$

**Определение 1.** Множество  $\mathcal{S}(t) = \{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}(t)\} \cup \partial\mathcal{O}(t)$  называется безопасным множеством.

Требуется построить управление  $u(t)$ , переводящее состояния системы из  $x(t_0) \in \mathcal{S}(t_0)$  в  $\mathcal{E}$  так, что

$$(4) \quad \begin{aligned} &x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}, \\ &x(t_0) \in \mathcal{S}(t_0) \Rightarrow x(t) \in \mathcal{S}(t) \text{ для всех } t \geq t_0, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{O}(t) \neq \emptyset$  для всех  $t \geq t_0$ .

## 3. Основной результат

Для выполнения (4) положим  $S_1 = S_1^\top > 0$  и введем в рассмотрение

$$(5) \quad V_1(x) = 1 - (x - c_1)^\top R_1 (x - c_1), \quad V_2(x) = x^\top R_2 x + c_1^\top S_1 c_1.$$

Цель (4) будет выполнена, если выполнены неравенства

$$(6) \quad V_1(x) \leq 0, \quad V_2(x) \leq 1.$$

Неравенство  $V_1(x) \leq 0$  будет выполнено для всех  $t \geq t_0$ , если  $x(t_0) \in \mathcal{S}$  и  $\dot{V}_2(x) \leq -\beta V_2(x)$  для  $x \in \mathcal{S}$  при  $\beta \geq 0$ . В свою очередь, неравенство  $V_2(x) \leq 1$  будет выполнено при  $t \rightarrow \infty$ , если  $x(t_0) \in \mathcal{S}$  и  $\dot{V}_2(x) \leq -\alpha V_2(x)$  для  $x \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$  при  $\alpha > 0$  и всех  $t \geq t_0$ .

Рассматривая  $\dot{V}_1(x) \leq -\beta V_1(x)$  и  $\dot{V}_2(x) \leq -\alpha V_2(x)$ , легко получить, что, если для некоторых  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$  верно, что

$$(7) \quad \begin{aligned} & \alpha_0 \geq \alpha + \alpha_1, \\ & \begin{bmatrix} -\alpha_1 R_2 & K_1^\top S_1 \\ S_1 K_1 & -S_1 K_1 - K_1^\top S_1 + \alpha S_1 \end{bmatrix} \leq 0, \end{aligned}$$

тогда выполнение (6) зависит от  $u(t)$  следующим образом:

$$(8a) \quad d(x)u + c(x) \leq 0, \quad a(x)u + b(x) \leq 0,$$

где приняты следующие обозначения:

$$(8b) \quad \begin{aligned} d(x) &= -2(x - c_1)^\top R_1 B, \quad a(x) = 2x^\top R_2 B, \\ c(x) &= -2(x - c_1)^\top R_1 (Ax - K_1(x - c_1)) + \beta V_1(x), \\ b(x) &= 2x^\top R_2 Ax + \alpha_0 x^\top R_2 x. \end{aligned}$$

Закон управления, обеспечивающий достижение цели (4), получим в аналитической форме  $u(t) := v(x)$  путем ввода в рассмотрение целевой функции  $q(v, \delta) = v^\top(x)v(x) + p\delta^2(x)$ ,  $p > 0$ , и решения задачи квадратичного программирования:

$$(9) \quad \begin{aligned} & q(v, \delta) \rightarrow \min, \\ & d(x)v(x) + c(x) \leq 0, \quad a(x)v(x) + b(x) - \delta(x) \leq 0, \end{aligned}$$

в которой первое ограничение (барьерная функция Ляпунова) является жестким, а параметр  $\delta(x)$  введен, чтобы ослабить второе ограничение (управляющую функцию Ляпунова) для значений  $x$ , для которых неравенства в (8a) несовместны. Для этого примем допущение.

**Допущение 1.** Для всех  $x \in \mathcal{S}$  выполнено  $d(x) \neq 0$ .

Чтобы решить (9) аналитически, рассмотрим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, v, \delta, \lambda) &= q(v, \delta) + \lambda_1(x) [d(x)v(x) + c(x)] + \\ &+ \lambda_2(x) [a(x)v(x) + b(x) - \delta(x)], \end{aligned}$$

где  $\lambda_1(x) \geq 0$ ,  $\lambda_2(x) \geq 0$  — множители Лагранжа.

Далее, применяя теорему Каруша-Куна-Таккера, получаем:

$$(10) \quad \begin{aligned} v^*(x) &= -\frac{1}{2}\lambda_1^*(x)d^\top(x) - \frac{1}{2}\lambda_2^*(x)a^\top(x), \\ \delta^*(x) &= \frac{1}{2p}\lambda_2^*(x), \end{aligned}$$

где выражения для  $\lambda_1^*(x)$  и  $\lambda_1^*(x)$  не приводятся в силу ограничений на объем статьи. Основной результат сформулирован в виде теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполнено допущение 1 и  $\hat{\alpha}_0, \hat{S}_1, \hat{\alpha}_1$  являются решением (7) при некотором значении  $\alpha$ . Тогда с выбором  $\alpha_0 = \hat{\alpha}_0$  закон управления (10) гарантирует для всех  $x(t_0) \in \mathcal{S}$ , что выполняется:

$$(11) \quad x_0 \in \mathcal{S}(t_0) \Rightarrow x(t) \in \mathcal{S}(t) \quad \forall t \geq t_0,$$

и существует  $p^* > 0$  такое, что для всех  $p \geq p^*$  и  $x(t_0) \in \mathcal{S}_\gamma$  имеем  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E}$ , где  $\mathcal{S}_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : V_2(x) \leq \gamma\}$  для некоторого  $\gamma > 0$ .

Доказательство и механизм определения  $\gamma$  не приведены ввиду ограничений на объем статьи.

#### Список литературы

1. *LaValle S.M.* Planning Algorithms. Cambridge University Press, 2006.
2. *Ames A.D., Xu X., Grizzle J.W., Tabuada P.* Control Barrier Function Based Quadratic Programs for Safety Critical Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. V. 62. No. 8. P. 3861–3876.

### Stabilization and Interception Evasion via Closed-Form Feedback Law based on Control Barrier and Lyapunov Functions

*K. A. Lastochkin, A. I. Glushchenko*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia  
lastconst@ipu.ru, aiglush@ipu.ru

A nonlinear control law is proposed on the basis of control barrier and control Lyapunov functions that locally solves the problem of asymptotic stabilization of a linear system state within a given stationary ellipsoid, while simultaneously evading interception by a moving ellipsoid.

## Метод инвариантных эллипсоидов в задаче подавления одного класса структурных возмущений

*К. А. Ласточкин, А. И. Глуценко*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
lastconst@ipu.ru, aiglush@ipu.ru

В работе с помощью метода инвариантных эллипсоидов и теории сверхустойчивости для линейных систем решена задача подавления одного класса структурных возмущений неизвестного порядка с неизвестными параметрами. Обеспечена сходимость состояний системы в эллипсоид, гарантируемый при отсутствии структурных возмущений.

*Ключевые слова:* структурные возмущения, инвариантные эллипсоиды, теория сверхустойчивости

### 1. Введение

В системах автоматического управления структурные возмущения вызываются рассмотрением упрощенной модели системы и приводят к несовпадению порядка дифференциальных уравнений реальной системы и номинальной модели, используемой при синтезе управления. Известно [1], что структурные возмущения могут приводить к потере устойчивости даже при устойчивой номинальной модели.

В работе предлагается синтезировать статическую линейную обратную связь, подавляющую структурные возмущения, на основе метода инвариантных эллипсоидов [2] и теории сверхустойчивости [3].

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную динамическую систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bh_1z(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ \dot{z}(t) &= Gz(t) + Ru(t), \quad z(t_0) = z_0, \end{aligned}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — измеряемое состояние системы,  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  — неизмеряемое состояние системы (состояние паразитной динамики),  $u(t) \in \mathbb{R}$  — вход системы,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  — известные матрицы системы такие, что пара  $(A, B)$  управляема,  $G \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ ,  $h_1 \in \mathbb{R}^{1 \times q}$  — неизвестные матрицы заранее неизвестного, но ограниченного сверху

и постоянного порядка  $q^* \geq q \geq 1$ , удовлетворяющие условиям

$$(2) \quad \begin{cases} h_i G = -\Lambda_i (h_i - h_{i+1}) \\ h_i R = 0, \quad i = 1, \dots, q-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} h_q G = -\Lambda_q h_q \\ h_q R = \Lambda_q \end{cases}, \quad \Lambda_i \neq \Lambda_j \quad \forall i \neq j,$$

где  $h_i \in \mathbb{R}^{1 \times q}$  и  $\Lambda_i > 0$  — это неизвестные параметры, удовлетворяющие

$$(3) \quad \begin{aligned} \Lambda_i - \Lambda_{i+1} &> 0, \quad \forall i = 1, \dots, q-1, \\ \Lambda_q &\geq \sigma, \end{aligned}$$

при этом числа  $\min_{i=1, \dots, q-1} (\Lambda_i - \Lambda_{i+1}) \geq \sigma > 0$  и  $q^* \geq 1$  известны.

Требуется обеспечить выполнение условия

$$(4) \quad x(t_0) \in \mathcal{E}_0 \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{E},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P_0 x \leq 1 \right\}, \\ \mathcal{E} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^\top P x \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

и  $P_0 = P_0^\top > 0$ ,  $P_0 \leq P$ , то есть  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_0$ , а  $P = P^\top > 0$  — это матрица, удовлетворяющая при некотором  $\lambda > 0$  и  $K_0 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  неравенству

$$(5) \quad (A + BK_0)^\top P + P(A + BK_0) + \lambda P \leq 0.$$

*Замечание 1.* Обозначим  $v_i(t) = h_i z(t)$ , а тогда выполнение условий (2) позволяет представить систему (1) в следующем виде:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bv_1(t), \\ \begin{cases} \dot{v}_i(t) = -\Lambda_i v_i(t) + \Lambda_i v_{i+1}(t), \quad i = 1, \dots, q-1 \\ \dot{v}_q(t) = -\Lambda_q v_q(t) + \Lambda_q u(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, условия (2) означают, что прежде чем подействовать на объект управления, сигнал  $u(t)$  пропускается через  $q$  апериодических звеньев первого порядка с неизвестными постоянными времени  $T_i = \Lambda_i^{-1}$ , удовлетворяющими (3). При доказательстве основного результата можно показать, что (3) — это условие сверхустойчивости [3].

### 3. Основной результат

Для решения поставленной задачи введем обратную связь:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{u}(t) &= g(t), \quad u(t_0) = u_0 \\ g(t) &= K\eta(t), \end{aligned}$$

и примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= [x(t) \quad u(t)]^\top, \quad C_e = [I_n \quad 0], \quad \mathbb{I} = -[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^\top \in \mathbb{R}^q, \\ A_e &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Кроме того, определим

$$\begin{aligned} e(t) &= [e_1(t) \quad e_2(t) \quad \dots \quad e_q(t)]^\top \in \mathbb{R}^q, \\ \begin{cases} e_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t), & i = 1, \dots, q-1 \\ e_q(t) = u(t) - v_q(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Свойства закона (7) описаны в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $\hat{Q}, \hat{Q}_0, \hat{Z}, \hat{Y}, \hat{X}, \hat{\mu}$  — это решения задачи

$$(8) \quad \mu + \text{tr}(\rho Q_0 - C_e Z C_e^\top) + \text{tr}(Q - C_e Z C_e^\top) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$(9) \quad \begin{aligned} &QA^\top + AQ + BY + Y^\top B^\top + \lambda Q \leq 0, \\ &\begin{bmatrix} ZA_e^\top + A_e Z + B_e X + X^\top B_e^\top + \alpha_1 Z & D_e \mathbb{I}^\top \\ & \mathbb{I} D_e^\top & -\alpha_2 \sigma^2 I_q \end{bmatrix} \leq 0, \\ &\begin{bmatrix} \rho Z & X^\top \\ X & \mu \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{cases} \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \\ \alpha_1 \geq \alpha_2 q^* \mu, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\rho Q_0 \geq C_e Z C_e^\top, \\ &Q \geq C_e Z C_e^\top, \\ &Q_0 \geq Q \end{aligned} \end{aligned}$$

относительно скалярной переменной  $\mu > 0$  и матричных переменных  $Q, Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$  при заданных  $\lambda, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \sigma > 0, q^* \geq 1, 1 \geq \rho > 0$ .

Тогда при выполнении условий  $e(t_0) \in \mathcal{X} = \left\{ e \in \mathbb{R}^q: e^\top e \leq \chi \right\}$  и  $\eta(t_0) \in \mathcal{S}_0 = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^{n+1}: \eta^\top \rho S \eta \leq 1 \right\}$ , где  $S = \hat{Z}^{-1}$ ,  $\chi = \frac{q^* \mu}{\sigma^2}$ , закон управления (7) с параметром  $K = \hat{X} \hat{Z}^{-1}$  обеспечивает выполнение цели (4) при  $P = \hat{Q}^{-1}$ ,  $P_0 = \hat{Q}_0^{-1}$ .

**Следствие 1.** Если (9) совместны при выбранных  $\sigma = \sigma_0 > 0$ ,  $q^* = q_0^* \geq 1$ , то они совместны и при всех  $\sigma \geq \sigma_0$ ,  $1 \leq q^* \leq q_0^*$ .

Таким образом, решение задачи (8) при ограничениях (9) позволяет получить закон управления (7), обеспечивающий выполнение цели (4).

### Список литературы

1. Rohrs C.E., Valavani L., Athans M., Stein G. Robustness of Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics // 21st IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1982. P. 3–11.
2. Железнов К.О., Хлебников М.В. Синтез обратной связи для линейной системы управления с возмущением на входах и выходах: робастная постановка // Проблемы управления. 2017. №. 3. С. 11–16.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // Автоматика и телемеханика. 2002. №. 8. С. 37–53.

## Invariant Ellipsoid Approach to Reject One Class of Unmodeled Dynamics

*K. A. Lastochkin, A. I. Glushchenko*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia  
lastconst@ipu.ru, aiglush@ipu.ru

The problem of rejection a class of unmodeled dynamics with unknown order and parameters is solved for linear systems using the method of invariant ellipsoids and the theory of superstability. The convergence of the system states to an ellipsoid, guaranteed for the case without unmodeled dynamics, is ensured.

## Предикторное управление для нелинейных систем с входным запаздыванием

Д. Н. Ле<sup>1</sup>, А. А. Пыркин<sup>2</sup>

Независимый исследователь<sup>1</sup>

Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>  
dinhnhannn@gmail.com, pyrkin@itmo.ru

Рассматривается синтез предикторного закона управления для нелинейных систем строгой обратной связи (strict-feedback) при наличии постоянного запаздывания по входу. Сначала строится стабилизирующий закон  $u = k(x)$  для модели без запаздывания (например, методом бэкстепинга), а затем реализуется управление в форме  $u(t) = k(\hat{x}(t + D))$ , где  $\hat{x}(t + D)$  вычисляется с помощью модельного предиктора. Для повышения робастности к дрейфу предиктора вводится динамика коррекции с принудительным периодическим сбросом по времени  $T$  и возможностью насыщения управления, что упрощает глобальную реализацию.

*Ключевые слова:* нелинейные системы, strict-feedback, запаздывание по входу, предиктор, коррекция, сброс

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему с запаздыванием по входу

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t - D), \quad D > 0,$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$ . Предполагается, что (1) имеет структуру строгой обратной связи, позволяющую построить гладкий закон управления  $u = k(x)$  для модели без запаздывания  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ .

Цель — реализовать компенсацию запаздывания по принципу предиктора:

$$u(t) = k(x(t + D)),$$

заменив недоступное  $x(t + D)$  на предсказание  $\hat{x}(t + D)$  и дополнив схему коррекцией с периодическим сбросом.

### 2. Алгоритм предиктора с коррекцией и сбросом

**Базовый стабилизатор и насыщение.** Пусть закон  $u = k(x)$  стабилизирует модель без запаздывания. Для ограничения входа используем насыщенный закон

$$(2) \quad k_s(x) := \text{sat}_{u_{\max}}(k(x)).$$

**Непрерывная форма предиктора.** Определим предикторную траекторию  $\chi(\theta, t)$ ,  $\theta \in [0, D]$ , как решение

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \chi(\theta, t) = f(\chi(\theta, t)) + g(\chi(\theta, t)) u(t + \theta - D), \quad \chi(0, t) = x(t) + \varepsilon(t),$$

где сигнал  $u(t + \theta - D)$  известен, поскольку  $t + \theta - D \in [t - D, t]$ . Оценка будущего состояния задается как

$$(4) \quad \hat{x}(t + D) := \chi(D, t),$$

и закон управления выбирается в виде

$$(5) \quad u(t) = k_s(\hat{x}(t + D)).$$

**Динамика коррекции и периодический сброс.** Для компенсации дрейфа предиктора вводится вектор коррекции  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n$

$$(6) \quad \dot{\varepsilon}(t) = -\Lambda \varepsilon(t) + L r(t), \quad \varepsilon(mT) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\Lambda \succ 0$ ,  $L$  — постоянные матрицы, а  $r(t)$  — инновация (ошибка предсказания «на текущий момент»). Для формирования  $r(t)$  сохраняется предсказание, вычисленное  $D$  секунд назад:

$$(7) \quad r(t) = x(t) - \hat{x}_{\text{now}}(t), \quad \hat{x}_{\text{now}}(t) := \chi(D, t - D).$$

Сброс (6) по периоду  $T$  препятствует накоплению ошибки коррекции на длинных интервалах.

**Дискретная реализация (окно длины  $D$ ).** Выберем шаг  $T_s$  и положим  $N = \text{round}(D/T_s)$ ,  $M = \text{round}(T/T_s)$ . Поддерживаются:

- кольцевой буфер  $U[0:N]$  значений  $u(t_k - D), \dots, u(t_k)$ ;
- массив предиктора  $X_p[0:N]$ , где  $X_p[i] \approx \hat{x}(t_k + iT_s)$ ;
- вектор коррекции  $\varepsilon_k$ .

**Алгоритм 1.** Предикторное управление с коррекцией и сбросом (дискретная форма).

*Инициализация:* заполнить  $U[i] \equiv u_0$ , положить  $X_p[0] = x(0)$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ; построить  $X_p[1:N]$  интегрированием  $\dot{x} = f(x) + g(x)U[i]$  на окне  $[0, D]$ .

Для  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

1. Измерить  $x_k = x(t_k)$ ,  $t_k = kT_s$ .
2. *Сброс по периоду*: если  $k \bmod M = 0$ , то положить  $\varepsilon_k \leftarrow 0$ ,  $X_p[0] \leftarrow x_k$  и заново построить  $X_p[1:N]$  интегрированием с входом  $U[0:N-1]$ .

3. *Инновация и коррекция*: вычислить  $r_k = x_k - X_p[0]$  и обновить

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + T_s(-\Lambda\varepsilon_k + Lr_k), \quad X_p[0] \leftarrow X_p[0] + \varepsilon_{k+1}.$$

4. *Управление*: вычислить  $u_k = \text{sat}_{u_{\max}}(k(X_p[N]))$ .
5. *Обновить буфер задержки*: сдвинуть  $U$  влево и положить  $U[N] \leftarrow u_k$ .
6. *Легкое обновление предиктора*: сдвинуть  $X_p$  влево. Затем продвинуть конец окна на один шаг интегрированием модели с постоянным входом  $u_k$  (например, методом Рунге–Кутты 4-го порядка):

$$X_p[N] \leftarrow \text{RK4}(x \mapsto f(x) + g(x)u_k, X_p[N], T_s).$$

7. Выдать  $u_k$  на исполнительный орган (объект использует  $u(t_k - D) \approx U[0]$ ).

### 3. Заключение

Предложена предикторная схема компенсации запаздывания по входу для нелинейных систем strict-feedback, дополненная динамикой коррекции и периодическим сбросом. Схема естественно сочетается с бэкстепингом для построения  $k(x)$  и допускает глобальную реализацию при насыщении управления. Дальнейшая работа включает получение условий на параметры  $\Lambda$ ,  $L$ ,  $T$  и точность численной реализации, обеспечивающих глобальную (или практическую) устойчивость замкнутой системы.

### Список литературы

1. *Krstić M.* Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems. Birkhäuser, 2009.
2. *Bekiaris-Liberis N., Krstić M.* Nonlinear Control Under Nonconstant Delays. SIAM, 2013.

# Predictor Control with Correction and Periodic Reset for Strict-Feedback Nonlinear Systems with Input Delay

*D. N. Le*<sup>1</sup>, *A. A. Pyrkin*<sup>2</sup>

Independent researcher<sup>1</sup>

ITMO University, Saint-Petersburg, Russia<sup>2</sup>

dinhnhann@gmail.com

We consider predictor-feedback control for strict-feedback nonlinear systems with a constant input delay. First, a stabilizing delay-free feedback  $u = k(x)$  is designed (e.g., via backstepping). The delay is compensated by  $u(t) = k(\hat{x}(t+D))$ , where  $\hat{x}(t+D)$  is obtained from a model-based predictor driven by the known control history over  $[t - D, t]$ . To mitigate predictor drift caused by modeling and numerical errors, an auxiliary correction dynamics with a forced periodic reset is introduced, enabling a global implementation under input saturation.

---

## Об одной задаче управления высоковольтными линиями электропередачи в условиях неопределенности

*Н. Д. Ливанов, И. В. Изместьев*

ЧелГУ, Челябинск, Россия  
nikita.livanov.mail@gmail.com, j748e8@gmail.com

Рассматривается численное решение задачи управления системой телеграфных уравнений, которая описывает передачу электроэнергии по  $n$  высоковольтным длинным линиям. Управляются напряжения, генерируемые  $m$  источниками. Электросеть подвержена внешним возмущениям, величина которых в точности не известна, а заданы лишь оценки их возможных значений. Цель выбора управления заключается в том, чтобы привести вектор средних значений силы тока и напряжений в фиксированный момент времени на заданный компакт при любых допустимых функциях внешних возмущений и любых допустимых реализациях помех. После замены переменных получена задача управления системой ОДУ при наличии неопределенности. С помощью численного метода для этой задачи построено множество разрешимости. Выполнены модельные расчеты.

*Ключевые слова:* управление, неопределенность, телеграфные уравнения, гарантированный результат

### 1. Постановка задачи

Пусть задана система из  $n$  длинных линий высокого напряжения, по которым осуществляется передача мощности от  $m$  генераторов электростанции, причем  $m \leq n$ . В  $k$  импедансах ( $k \leq n$ ) неизвестно точное значение напряжения и силы тока, но известны границы их изменений.

Данная система формализуется  $n$  телеграфными уравнениями [1], описывающими малые колебания напряжений и сил токов в электросети длинных линий:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial V_i(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial J_i(t, x)}{\partial x} - \frac{R}{L} V_i(t, x) + f_i^{(1)}(t, x), \\ \frac{\partial J_i(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial V_i(t, x)}{\partial x} - \frac{G}{C} J_i(t, x) + f_i^{(2)}(t, x), \end{cases} \quad i = \overline{1, n},$$

где  $0 \leq t \leq p$  и  $0 \leq x \leq l$ ,  $l$  — длина каждой линии; для  $i$ -й длинной линии функции  $V_i(t, x)$  и  $J_i(t, x)$  описывают изменение напряжения и силы тока, соответственно. Каждая длинная линия характеризуется

следующими распределенными параметрами: сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$ , электроемкостью  $C$ , коэффициентом утечки  $G$ . В начальный момент  $t = 0$  заданы законы распределения  $V_i(t, x) = g_i^{(1)}(x)$ ,  $J_i(t, x) = g_i^{(2)}(x)$ , где функции  $g_i^{(j)}(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = 1, 2$ , являются непрерывными.

Считаем, что напряжения  $V_i(t, 0)$  и  $V_i(t, l)$  и сила тока  $J_i(t, l)$  на концах  $i$ -й линий,  $i = \overline{1, n}$ , изменяются согласно уравнениям

$$(2) \quad V_i(t, 0) = a_i^{(1)}(t) + b_i^{(1)}(t)D_i\bar{\xi}(t);$$

$$(3) \quad \begin{aligned} V_i(t, l) &= a_i^{(2)}(t) + b_i^{(2)}(t)G_i\bar{\eta}(t), \\ J_i(t, l) &= a_i^{(3)}(t) + b_i^{(3)}(t)F_i\bar{\chi}(t). \end{aligned}$$

Здесь функции  $a_i^{(j)}(t)$ ,  $b_i^{(j)}(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , непрерывны на  $[0, p]$ , причем  $b_i^{(j)}(t) \geq 0$ . Вектор-функции

$$\bar{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))^T \in U,$$

$$(\bar{\eta}(t), \bar{\chi}(t))^T = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_k(t), \chi_1(t), \chi_2(t), \dots, \chi_k(t))^T \in V,$$

где  $U \subset \mathbb{R}^m$  и  $V \subset \mathbb{R}^{2k}$  — выпуклые компакты, являются управлением и помехой, соответственно. Символ  $^T$  обозначает операцию транспонирования. С помощью матрицы  $D$  размерности  $n$  на  $m$ , задается выбор одномерного управления  $\xi_q(t)$ ,  $q = \overline{1, m}$ , для каждого генератора сигнала, а выбор одномерных помех  $\eta_y(t)$  и  $\chi_y(t)$ ,  $y = \overline{1, k}$ , задается матрицами  $G$  и  $F$  размерности  $n$  на  $k$ , соответственно. За  $D_i$ ,  $G_i$ ,  $F_i$ , обозначены  $i$ -е строки матриц  $D$ ,  $G$ ,  $F$ , соответственно.

Непрерывные функции  $f_i^{(j)}(t, x)$ , определяющие внешние возмущения, не заданы точно, но известны их оценки:

$$(4) \quad \check{f}_i^{(j)}(t, x) \leq f_i^{(j)}(t, x) \leq \hat{f}_i^{(j)}(t, x), \quad j = 1, 2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Функции  $\check{f}_i^{(j)}(t, x)$ ,  $\hat{f}_i^{(j)}(t, x)$  являются непрерывными.

Пусть задан компакт  $Z \subset \mathbb{R}^d$  (возможно, невыпуклый) и постоянная матрица  $W$  размерности  $d$  на  $2n$ . Цель выбора управления  $\bar{\xi}(t)$

в (2) заключается в осуществлении включения

$$(5) \quad W\bar{\lambda} \in Z, \quad \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \int_0^l V_1(p, x)\sigma_1^{(V)}(x)dx \\ \dots \\ \int_0^l V_n(p, x)\sigma_n^{(V)}(x)dx \\ \int_0^l J_1(p, x)\sigma_1^{(J)}(x)dx \\ \dots \\ \int_0^l J_n(p, x)\sigma_n^{(J)}(x)dx \end{pmatrix},$$

при любых допустимых реализациях помех  $\bar{\eta}(t)$ ,  $\bar{\chi}(t)$  (3) и для любых непрерывных функций  $f_i^{(j)}(t, x)$  (4),  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, 2}$ . Здесь  $\sigma_i^{(V)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\sigma_i^{(J)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$  — заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям  $\sigma_i^{(V)}(0) = \sigma_i^{(V)}(l) = \sigma_i^{(J)}(0) = \sigma_i^{(J)}(l) = 0$ .

## 2. Численное решение

После замены переменных [2] получена линейная задача управления при наличии неопределенности:

$$(6) \quad \dot{\bar{z}}(t) = -A(t)\bar{\xi}(t) + B(t)\bar{v}(t), \quad \bar{\xi}(t) \in U, \quad \bar{v}(t) \in Q, \quad \bar{z}(p) \in Z.$$

Здесь  $\bar{v}(t)$  неопределенность;  $Q$  — выпуклый компакт;  $A(t)$  и  $B(t)$  — матрицы размерностей  $2n$  на  $m$  и  $2n$  на  $2k$ , соответственно, с коэффициентами, которые являются непрерывными функциями.

Трактую помехи и неопределенности как управление второго игрока (противника) [3], сводим исходную задачу (1)–(5) к линейной дифференциальной игре.

Для решения задачи (6) предложена модификация приближенного сеточного алгоритма [4] для вычисления множеств разрешимости первого игрока, в рамках которой реализуется новый подход к приближенному вычислению разности Минковского для конечных множеств.

Проведены модельные расчеты множества разрешимости для конкретных значений числовых параметров. Используя метод экстремального прицеливания [5], построено гарантирующее управление первого игрока, решающее исходную задачу (1)–(5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-21-00679), <https://rscf.ru/project/25-21-00679/>.

### Список литературы

1. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.–Ленинград: ОНТИ, 1936.
2. Livanov N.D., Ukhobotov V.I. On One Problem of Control of Voltage During Signal Transmission in a Long Line // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление и радиоэлектроника». 2021. Т. 20. № 3. С. 59–65.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
4. Ушаков В.Н., Матвейчук А.Р., Паршиков Г.В. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 275–284.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

### On a Problem of High-Voltage Power Transmission Lines Control Under Uncertainty

*N. D. Livanov, I. V. Izmet'sev*

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia  
nikita.livanov.mail@gmail.com, j748e8@gmail.com

This paper considers the numerical solution of a control problem for a system of telegraph equations describing the transmission of electricity over  $n$  high-voltage long lines. The voltages generated by  $m$  sources are controlled. The electrical network is subject to external disturbances, the exact magnitude of which is unknown; only estimates of their possible values are given. The control objective is to steer the vector of average current and voltage values to a specified compact set at a fixed time, for all admissible external disturbance functions and all admissible noise realizations. After a change of variables, the problem is reduced to controlling a system of ordinary differential equations under uncertainty. Using a numerical method, the reachable set for this problem is constructed. Model calculations have been performed.

---

## Блочный синтез системы управления колесной платформой с учетом ограничений на скорость и динамическим сглаживанием опорной траектории

*Л. Г. Ли, Ю. Г. Кокунько*

ИПУ РАН, Москва, Россия

lovelee138138@gmail.com, juliakokunko@gmail.com

Для колесной платформы с двумя ведущими колесами в рамках блочного подхода формализованы законы ограниченного управления со стабилизирующими сигмовидными функциями двух типов. Для сглаживания опорной траектории предложен динамический генератор со специальными настройками, обеспечивающий плавный въезд платформы на маршрут из произвольных начальных условий.

*Ключевые слова:* колесная платформа, траекторное управление, ограничение на скорость, сигмоиды, сатураторы

Объектом управления является беспилотная колесная платформа с двумя ведущими (тяжелыми и жесткими) колесами, которые движутся без проскальзывания по абсолютно шероховатой горизонтальной поверхности. В неподвижной декартовой системе координат  $Oxy$  кинематическая модель центра масс платформы  $(x(t), y(t))$  имеет вид

$$(1) \quad \dot{x} = v \cos(\theta), \quad \dot{y} = v \sin(\theta), \quad \dot{\theta} = \omega,$$

где  $\theta \in [-\pi; \pi]$  — угол между направлением курса и осью  $Ox$ , значения регулируемых переменных  $x(t), y(t), \theta(t)$  полагаются известными,  $v, \omega$  — линейная и угловая скорости. Для вращения ведущих колес на платформе установлены два электродвигателя постоянного тока (ДПТ), поэтому в динамической подсистеме, которая здесь не рассматривается, имеются два токовых контура и два истинных управления (напряжения питания якорных цепей ДПТ). Согласно принципу декомпозиции в системе (1) в качестве виртуальных управлений принимаются скорости  $v, \omega$ , которые одновременно служат задающими воздействиями для динамической подсистемы. К виртуальным управлениям предъявляются требования гладкости и ограниченности:

$$(2) \quad |v(t)| \leq V, \quad |\omega(t)| \leq W, \quad t \geq 0.$$

Ставится задача синтеза виртуальных управлений в форме обрат-

ной связи, обеспечивающей отслеживание регулируемыми переменными эталонной траектории  $(x_r(t), y_r(t))$ , являющейся допустимой:

$$(3) \quad \theta_r(t) = \arctan(\dot{y}_r(t)/\dot{x}_r(t)) \in [-\pi; \pi],$$

$$(4) \quad |v_r(t)| = \sqrt{\dot{x}_r^2(t) + \dot{y}_r^2(t)} \leq V_r < V, \quad |\omega_r(t)| = |\dot{\theta}_r(t)| \leq W_r < W, \quad t \geq 0.$$

Задача слежения сводится к стабилизации ошибок слежения. Для учета неголономной связи (3) ошибки слежения рассматриваются в системе координат, жестко связанной с платформой [1]:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{pmatrix}.$$

После дифференцирования выражений (5) в силу (1) получены уравнения динамики ошибок слежения  $e = (e_x, e_y, e_\theta)^T$ :

$$(6) \quad \dot{e}_x = \omega e_y - v + v_r \cos(e_\theta), \quad \dot{e}_y = -\omega e_x + v_r \sin(e_\theta), \quad \dot{e}_\theta = \omega_r - \omega.$$

В рамках блочного [2] подхода формализованы законы управления

$$(7) \quad \begin{aligned} v &= v_r \cos(e_\theta) + m_2 f(k_2(e_x + m_1 \operatorname{sgn}(\omega) f(k_1 e_y))), \\ \omega &= \omega_r + m_3 f(k_3 e_\theta + k_4 e_y), \quad k_i, m_i = \operatorname{const} > 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

с ограниченными S-образными стабилизирующими функциями  $f(*)$  двух типов: в виде гладкой функции обобщенного гиперболического тангенса  $f(*) = \tanh(*)$  и кусочно-линейной функции с насыщением  $f(*) = \operatorname{sat}(*)$ . Показано, что в обоих случаях обеспечивается выполнение ограничений (2) и стабилизация замкнутой системы (6)–(7) с сопоставимыми показателями качества.

Для реализации закона управления (7) нужно знать не только координаты радиус-вектора эталонной траектории, но и их производные до второго порядка включительно (4). При аналитическом задании эталонной траектории они вычисляются непосредственно.

Если задающие воздействия поступают в систему управления роботом в реальном времени, то возникает проблема сглаживания и реального дифференцирования командных сигналов. Для решения этих

задач был использован автономный динамический генератор заданий со стабилизирующими функциями  $f(*)$  также двух типов:

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}_1 &= \chi_2, \quad \dot{\chi}_2 = \chi_3, \quad \dot{\chi} = w, \\ w &= -p_3 f(l_3(\chi_3 + p_2 f(l_2(\chi_2 + p_1 f(l_1(\chi_1 - \bar{\chi})))))), \end{aligned}$$

где  $\chi_i \in \mathbb{R}^2$  — переменные состояния,  $w \in \mathbb{R}^2$  — управляющие воздействия, коэффициенты усиления  $p_i, l_i = \text{const} > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  выбираются на основе неравенств с учетом ограничений (2) [3],  $\bar{\chi} = (\bar{x}_r(t), \bar{y}_r(t))^T$  — опорная негладкая траектория, которая отслеживается с некоторой точностью, что является показателем ее сглаживания в угловых точках. Показано, что переменные генератора (8) порождают в реальном времени плавную траекторию и ее производные с заданными ограничениями:  $\chi_1 = (x_r(t), y_r(t))^T$ ,  $\chi_2 = (\dot{x}_2(t), \dot{y}_r(t))^T$ ,  $\chi_3 = (\ddot{x}_r(t), \ddot{y}_r(t))^T$ . Эти сигналы используются в качестве эталонных реализуемых задающих воздействий (3)–(4) в законах управления (7).

В базовом варианте  $e(0) = \vec{0}$  при начальных значениях  $\chi_1(0) = \bar{\chi}(0)$ ,  $\chi_2(0) = \chi_3(0) = \vec{0}$  платформа сразу начинает движение по маршруту. В противном случае  $e(0) \neq \vec{0}$  возникают колебательные переходные процессы ошибок слежения, но с ограниченными всплесками управляющих воздействий (7). Разработаны алгоритмы специальной настройки начальных условий динамического генератора (8), обеспечивающие плавный безостановочный и безопасный въезд платформы на маршрут из произвольных начальных условий.

Результаты моделирования показали, что в следящих системах (6)–(7) и (8) со стабилизирующими функциями  $f(*)$  обоих типов графики переменных состояния практически одинаковы. Но сатураторы реализуют более жесткое ограничение управлений, а  $f(*) = \tanh(*)$  приводят к более плавным изменениям управляющих воздействий в переходных режимах и рекомендуются к использованию в (7).

### Список литературы

1. Jiang Z.P., Nijmeijer H. Tracking Control of Mobile Robots. a Case Study in Back-Stepping // Automatica. 1997. V. 33. No. 7. P. 1393–1399
2. Антипов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А. Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. 2022. № 1. С. 40–66.
3. Кожушко Ю.Г., Краснова С.А. Формирование эталонных траекторий для беспилотных колесных платформ с учетом ограничений на скорость,

## Block Synthesis of a Wheeled Platform Control System Taking into Account Speed Limitations and Dynamic Smoothing of the Reference Trajectory

*L. G. Li, J. G. Kokunko*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia  
lovelee138138@gmail.com, juliakokunko@gmail.com

For a wheeled platform with two driving wheels, limited control laws with two types of stabilizing sigmoid functions are formalized using a block approach. A dynamic generator with special settings is proposed to smooth the reference trajectory, ensuring a smooth platform entry into the route from arbitrary initial conditions.

---

УДК 517.962.22

### О гарантированных оценках устойчивости идентификации коэффициентов разностных уравнений

*А. А. Ломов*

ИМ СО РАН им. С. Л. Соболева, НГУ, Новосибирск, Россия  
aal@post.nsu.ru

В задаче типа Прони параметрической идентификации коэффициентов стационарного линейного разностного уравнения с вариационной целевой функцией по теореме об оценке конечных приращений получены новые гарантированные оценки устойчивости результатов идентификации. Проведено вычислительное сравнение с другими известными оценками устойчивости.

*Ключевые слова:* Разностные уравнения, идентификация коэффициентов, вариационная задача Прони, локальная устойчивость, гарантированные оценки.

#### 1. Введение

В работе исследуется задача параметрической идентификации коэффициентов стационарного линейного разностного уравнения с точки

зрения гарантированных оценок для погрешностей идентификации в зависимости от предполагаемого уровня погрешности в наблюдениях. Общепринятыми являются подходы на основе доверительных интервалов (вероятностного характера) [1], интервальной арифметики (апостериорно, без вывода явных формул для интервалов) [2]. Альтернативный способ состоит в исследовании асимптотики по малости амплитуды возмущений с получением явной зависимости между нормами возмущений и нормами погрешностей оценок на основе тейлоровского разложения неявной функции зависимости оценок параметров  $\theta$  от наблюдений  $x$ , исходя из условия равенства нулю градиента целевой функции идентификации  $J'_\theta(\theta, x) = 0$  [3, 4]. Из верхних оценок для остаточного члена разложения в ряд Тейлора зависимости  $\theta(x)$  получаются верхние гарантированные границы ошибок идентификации в виде явных формул  $\delta\theta(\delta x)$ . Они являются наилучшими в пределе  $\delta x \rightarrow 0$ , что позволяет проводить теоретическое сравнение методов идентификации с разными целевыми функциями.

В этой парадигме получены новые гарантированные верхние границы для погрешностей идентификации на основе теоремы о среднем. В качестве остаточного члена ряда использовано среднее по области значение линейного слагаемого, что позволило на порядок ослабить технические ограничения на малость нормы возмущений  $\delta x$ .

## 2. Основной результат

Исследуется задача идентификации вектора параметров  $\theta = [\theta_1; \dots; \theta_v] \doteq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^v$  разностного уравнения

$$(1) \quad \alpha_n x_{k+n} + \alpha_{n-1} x_{k+n-1} + \dots + \alpha_0 x_k = 0, \quad k = \overline{1, N-n},$$

с матричными коэффициентами  $\alpha_i = \alpha_i(\theta) \in \mathbb{R}^{r \times (r+m)}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $\alpha_n \neq 0$ ,  $\alpha_0 \neq 0$ , по возмущенным наблюдениям  $y = x + \delta x \in \mathbb{R}^{N(r+m)}$  процесса  $x \doteq [x_1; \dots; x_N]$ . Истинное значение  $\theta = \theta_*$  и процесс  $x$  заранее не известны. Предполагается, что  $\alpha(\theta) = D\theta + d$ , где  $\alpha \doteq \text{vect} [\alpha_0; \dots; \alpha_n] \in \mathbb{R}^l$ ,  $l \doteq r(r+m)(n+1)$ , матрица  $D \in \mathbb{R}^{l \times v}$  и столбец  $d \in \mathbb{R}^l$  заданы, столбцы составной матрицы  $[D, d] \in \mathbb{R}^{l \times (v+1)}$  линейно независимы, задача вычисления  $\theta$  по  $x$  однозначно разрешима. Для минимизации ошибок идентификации при аддитивных возмущениях  $x \mapsto x + \delta x$  выбрана ЦФ

(2)

$$J(\theta, y) \doteq \frac{1}{2} \|y - \hat{x}(\theta)\|^2 \rightarrow \min_{\theta}, \quad \hat{x}(\theta) \doteq \left(I - GCG^{\top}\right) y, \quad C \doteq \left(G^{\top} G\right)^{-1},$$

$$G^{\top} = G(\theta)^{\top} \doteq \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r(N-n) \times N(r+m)}$$

Здесь  $G$  — клеточно-теплицевая матрица системы уравнений  $G^{\top} x = 0$  (1). Задачу (2) называем *вариационной задачей Прони*.

Основной результат состоит в следующем. Определим матрицы

$$R \doteq \hat{X}^{\top} C \hat{X}, \quad \hat{X} \doteq \left(G^{\top} \hat{x}\right)_{\theta}' = \left[\left(G^{\top}\right)_{\theta_1}' \hat{x} \quad \dots \quad \left(G^{\top}\right)_{\theta_v}' \hat{x}\right].$$

**Теорема.** В задаче (2) при выполнении условий

$$\|\delta x\| \leq \frac{\mu\omega}{\mu + \omega^2}, \quad \omega \doteq \frac{a}{\mu + c}, \quad a \doteq \frac{\lambda_{\min}^{3/2}}{a_{\theta}}, \quad c \doteq \frac{a_x \sqrt{\lambda_{\min}}}{a_{\theta}},$$

$$\|\delta x\| \leq \frac{\|D\| \sqrt{\lambda_{\min}}}{5n \|C\|^{1/2} \mu}, \quad \lambda_{\min} \doteq \lambda_{\min}(R),$$

$$a_{\theta} \doteq 5n \|X\|^2 \cdot \|C\|^{3/2} \cdot \|D\|_F, \quad a_x \doteq 6 \|X\| \cdot \|C\| \cdot \|D\|_F,$$

верна гарантированная оценка  $\|\delta\theta\| \leq \mu \frac{\|\delta x\|}{\sqrt{\lambda_{\min}}}$ ,  $\mu > 1$ .

Проведено численное сравнение новых оценок с ранее известными теоремами об устойчивости [3, 5] на двух примерах разностных уравнений.

### Список литературы

1. Saucedo O., Laubmeier A., Tang T., Levy B., Asik L., Pollington T. and Feldman O.P. Comparative Analysis of Practical Identifiability Methods for an SEIR Model // AIMS Mathematics. 2024. V. 9 No. 9. P. 24722–24761.
2. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Параметрическая идентификация динамических систем на основе внешних интервальных оценок фазовых переменных // Компьютерные исследования и моделирование. 2024. Т. 16. № 2. С. 299–314.
3. Ломов А.А. О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 4. С. 81–103.

4. *Lomov A.A.* On Guaranteed Error Bounds for Parameter Identification of Linear Difference Equations // Computational Mathematics and Modeling. 21 January 2026. <https://doi.org/10.1007/s10598-025-09660-w>.
5. *Markovsky I., Van Huffel S.* Overview of Total Least Squares Methods // Signal Processing. 2007. V. 87. P. 2283–2302.

## **On Guaranteed Error Estimates for the Identification of Coefficients of Difference Equations**

*A. A. Lomov*

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Russia  
aal@post.nsu.ru

Using the Mean value theorem, new guaranteed error bounds for solutions of the variational Prony problem of identifying the coefficients of difference equations are obtained. A computational comparison with other known stability results is carried out.

---

## **Фиксированно-временное барьерное скользящее управление нелинейными системами, подверженными ограниченными неизвестным возмущениям**

*Х. Д. Лонг<sup>1</sup>, А. А. Пыркин<sup>2</sup>, Ч. Х. Конг<sup>2</sup>*

Технологический университет Ле Куи Дона, Ханой, Вьетнам<sup>1</sup>

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>

longhd@lqdtu.edu.vn, pyrkin@itmo.ru, werkaiaye@gmail.com

В статье предложен робастный метод управления нелинейными системами второго порядка при наличии ограниченных неизвестных возмущений и ограничений по входу. Подход объединяет фиксированно-временную устойчивость, симметричные барьерные функции Ляпунова и управление в скользящем режиме, обеспечивая быстрое и устойчивое слежение с соблюдением ограничений по состоянию. Барьерное преобразование гарантирует выполнение заданных границ, а нелинейная скользящая поверхность обеспечивает сходимость за фиксированное время, не зависящее от начальных условий. Сглаженный переключающий закон на основе гиперболического тангенса уменьшает дрожание и сохраняет ограниченность управляющего сигнала.

*Ключевые слова:* управление с фиксированным временем сходимости, симметричное барьерное преобразование, скользящий режим, нелинейные системы, ограничения по входу, робастное управление

### **1. Введение**

Робастное слежение за траекторией нелинейных систем при наличии внешних возмущений, неопределенностей модели и ограничений исполнительных механизмов остается сложной задачей управления, особенно в робототехнике, автономном транспорте и аэрокосмических системах [1]. Классическое управление в скользящем режиме (SMC) обеспечивает высокую робастность [2], однако страдает эффектом дрожания и обычно гарантирует лишь асимптотическую или конечноробастную сходимость. Улучшенные схемы, такие как TSMC и NFTSMC [3], ускоряют сходимость, но не обеспечивают ее независимость от начальных условий и редко учитывают насыщение по входу. Теория фиксированного времени сходимости позволяет гарантировать достижение цели за заранее ограниченный интервал времени, не зависящий от начального состояния [4], однако в большинстве работ не рассматриваются ограничения по состоянию и входу. Барьерные функции

Ляпунова (BLF) эффективно обеспечивают выполнение ограничений по состоянию [5], но редко интегрируются с фиксированно-временной сходимостью и робастностью скользящего режима в единой структуре [6]. В связи с этим в работе предлагается метод FIC-SBLSC — скользящее управление с фиксированным временем сходимости на основе симметричного барьерного преобразования для нелинейных систем второго порядка с ограниченными возмущениями, обеспечивающее соблюдение ограничений по состоянию и входу, подавление возмущений и снижение эффекта дрожания.

## 2. Основной результат

Рассмотрим класс нелинейных систем второго порядка, подверженных воздействию ограниченных неизвестных возмущений, описываемых следующим образом

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u(t) + d(t), \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  обозначают векторы состояний системы, а  $u \in \mathbb{R}^n$  — вектор управляющего воздействия. Нелинейные функции  $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$  и  $g(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  представляют соответственно известную дрейфовую динамику системы и матрицу коэффициентов управления. Величина  $d(t) \in \mathbb{R}^n$  обозначает неизвестное, но ограниченное внешнее возмущение.

Вводится симметричное барьерное преобразование следующего вида

$$(2) \quad \xi = \frac{e_1}{b - |e_1|}, \quad |e_1| < b.$$

Нелинейная поверхность скольжения определяется следующим образом

$$(3) \quad \sigma = \dot{\xi} + \kappa_1 \xi + \kappa_2 |\xi|^\alpha \text{sign}(\xi).$$

где  $\kappa_1 > 0$  и  $\kappa_2 > 0$  — настраиваемые коэффициенты, а  $0 < \alpha < 1$  — дробный показатель степени, обеспечивающий нелинейное демпфирование.

Для обеспечения фиксированно-временной сходимости поверхности скольжения  $\sigma \rightarrow 0$  предлагаемый управляющий сигнал формируется как сумма двух составляющих:

$$(4) \quad u(t) = u_{eq}(t) + u_{sw}(t).$$

где эквивалентное управление  $u_{eq}$  предназначено для компенсации номинальной динамики системы:

$$(5) \quad u_{eq} = g^{-1}(x_1, x_2) \left( \ddot{x}_d - \ddot{\xi} - \kappa_1 \dot{\xi} - \kappa_2 \alpha |\xi|^{\alpha-1} \dot{\xi} - f(x_1, x_2) \right),$$

а робастная нелинейная составляющая  $u_{sw}$  обеспечивает конечновременную сходимость и подавление возмущений:

$$(6) \quad u_{sw} = -k_1 \left( |\sigma|^{\frac{1}{2}} + \gamma |\sigma|^{\frac{3}{2}} \right) \tanh \left( \frac{\sigma}{\mu} \right) - k_2 \tanh \left( \frac{\sigma}{\mu} \right).$$

где  $k_1, k_2 > 0$  — коэффициенты усиления для подавления возмущений и уменьшения ошибки, а  $\gamma > 0$  — коэффициент высшего порядка.

**Теорема 1.** *Рассмотрим систему (1) с законом управления (4). Если коэффициенты регулятора удовлетворяют условию  $k_2 > \bar{\Delta}$ , то переменная скольжения  $\sigma(t)$  сходится к нулю за фиксированное время, причем время установления ограничено и не зависит от начальных условий.*

**Теорема 2.** *Если  $\sigma(t) \rightarrow 0$  за фиксированное время, то преобразованная барьером ошибка  $\xi(t)$  и исходная ошибка слежения  $e_1(t)$  сходятся к нулю при соблюдении ограничения  $|e_1(t)| < b$ .*

### 3. Эквивалентная задача

Рассмотрим МИМО-структуру с диагональной связью:  $f_i(x_{1,i}, x_{2,i}) = 0.5 \sin(x_{1,i}) + 0.3x_{2,i}^2$ ,  $g_i(x_{1,i}, x_{2,i}) = 1 + 0.2 \cos(x_{1,i})$ , и возмущение задается в виде  $d_i(t) = 0.1 \sin(2\pi t)$ , с  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Желаемая траектория выбирается покомпонентно следующим образом:  $x_{d,i}(t) = \sin(t)$ ,  $\dot{x}_{d,i}(t) = \cos(t)$ ,  $\ddot{x}_{d,i}(t) = -\sin(t)$ . Параметры регулятора FIC-SBLSC, использованные в моделировании, выбраны следующим образом:  $b = 1.2$ ,  $\kappa_1 = 4$ ,  $\kappa_2 = 3.5$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $k_1 = k_2 = 5$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\mu = 0.005$ , и  $u_{\max} = 10$ .

Предложенный регулятор сравнивается с управлением в скользящем режиме (SMC) и несингулярным быстрым терминальным скользящим управлением (NFTSMC).

### 4. Заключение

В работе разработан робастный метод скользящего управления с фиксированным временем сходимости на основе симметричной барьерной функции Ляпунова для нелинейных систем при наличии ограничений по состоянию и входу. Доказана фиксированно-временная устойчивость замкнутой системы и соблюдение заданных ограничений. Чис-

ленные эксперименты подтвердили высокую точность слежения, быстрое затухание переходных процессов и снижение эффекта дрожания по сравнению с существующими методами.

### Список литературы

1. *Ullah S., Alghamdi H., et al.* Robust Control Design of Under-Actuated Nonlinear Systems: Quadcopter Unmanned Aerial Vehicles with Integral Backstepping Integral Terminal Fractional-Order Sliding Mode // *Fractal and Fractional*. 2024. V. 8. No. 7. P. 412.
2. *Incremona G.P., Rubagotti M., Ferrara A.* Sliding Mode Control of Constrained Nonlinear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. V. 63. No. 6. P. 2965–2972.
3. *Karami H., Ghasemi R.* Fixed-Time Terminal Sliding Mode Trajectory Tracking Design for a Class of Nonlinear Dynamical Model of Air Cushion Vehicle // *SN Applied Sciences*. 2019. V. 2. Art. 98.
4. *Chen X., Zhang X., Qian C.* Fixed-Time Stability Analysis and Stabilization Control of a Class of Nonlinear Systems with Output Constraints // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2022. V. 32. No. 1. P. 498–513.
5. *Tee K.P., Ge S.S., Tay E.H.* Barrier Lyapunov Functions for the Control of Output-Constrained Nonlinear Systems // *Automatica*. 2009. V. 45. No. 4. P. 918–927.
6. *Wu Y., Zhang H.-T., Huang T., Zhao H., Ding H.* Adaptive Chatter Mitigation Control for Machining Processes with Input Saturations // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2015. V. 26. No. 14. P. 3088–3100.

### Fixed-Time Barrier-Based Sliding Mode Control of Nonlinear Systems Subject to Bounded Unknown Disturbances

*H. D. Long<sup>1</sup>, A. A. Pyrkin<sup>2</sup>, T. H. Cong<sup>2</sup>*

Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam<sup>2</sup>

ITMO University, Saint Petersburg, Russia<sup>2</sup>

longhd@lqdtu.edu.vn, pyrkin@itmo.ru, werkaiaye@gmail.com

This paper proposes a robust control method for second-order nonlinear systems in the presence of bounded unknown disturbances and input constraints. The approach integrates fixed-time stability, symmetric Barrier Lyapunov Functions, and sliding mode control to achieve fast and robust tracking while enforcing state constraints. The barrier transformation guarantees satisfaction of the prescribed bounds, and the nonlinear sliding surface ensures fixed-time convergence independent of

initial conditions. A smooth switching law based on the hyperbolic tangent function reduces chattering while maintaining bounded control input.

---

УДК 531.36

## Об управлении зарядкой батареи

*С. Лу, М. З. Досаев, Р. М. Щербов*

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
lusilong36@gmail.com, dosayev@imec.msu.ru , romanbt405@gmail.com

В настоящее время большинство планетоходов используют солнечные панели для зарядки. Однако в условиях загрязненной атмосферы возможным решением для зарядки планетоходов остается только использование энергии ветра. Для обеспечения стабильной зарядки аккумулятора разработана система управления зарядным током. Разработана математическая модель электромеханической системы. В аэродинамической трубе НИИ механики МГУ проведено экспериментальное исследование процесса зарядки планетохода, оснащенного ветроэнергетической установкой с ротором Савониуса. Экспериментально получены стационарные режимы системы для различных состояний аккумулятора. На основе полученных экспериментальных данных определены параметры математической модели. Расчеты модели хорошо согласуются с экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* ротор Савониуса, ток зарядки аккумулятора, стационарные режимы

### 1. Введение

На планетах с загрязненной атмосферой, а также в условиях полярной ночи в северных районах Земли представляется целесообразным использование ветроэнергетических установок в качестве источника энергии. Ротор Савониуса является хорошим выбором для ветроприемного элемента благодаря своей способности работать при любом направлении ветра. Исследование ротора Савониуса является довольно популярной задачей [1]. Тем не менее, до сих пор актуальной остается проблема разработки замкнутых математических моделей, описывающих электромеханическое взаимодействие системы, состоящей из ротора Савониуса и генератора [2].

## 2. Основной результат

В аэродинамической трубе НИИ механики МГУ проведено экспериментальное исследование процесса зарядки планетохода, оснащенного ветроэнергетической установкой с ротором Савониуса радиусом 0,4 м и высотой 1 м. Построена замкнутая математическая модель электро-механической системы, состоящей из ротора Савониуса, генератора, блока управления током и аккумулятора (рис. 1).

Уравнения системы можно представить в следующем виде:

$$(1) \quad \begin{aligned} J\dot{\omega} &= b\frac{\rho s}{2}v^2C_m(\omega) - c\frac{c\eta(\omega - \omega_0) - \sqrt{\eta^2c^2(\omega - \omega_0)^2 - 4R\eta U_2 I_2}}{2\eta R} \\ C_b\frac{d(U_2 - U_{oc} - I_2r_1)}{dt} + \frac{U_2 - U_{oc} - I_2r_1}{r_2} &= I_2 \\ U_{oc} &= U_0 + \alpha \int_0^t I_2 dt, \end{aligned}$$

где  $C_m$  — коэффициент момента ротора Савониуса,  $U_{oc}$  — напряжение разомкнутого контура,  $I_2$  — ток зарядки,  $I_1$  — ток на выходе генератора,  $C_d$  — эффективная емкость аккумулятора,  $\alpha$  — постоянный коэффициент зарядки,  $\rho$  — плотность воздуха,  $s$  — площадь ветротурбины,  $b$  — радиус ветротурбины,  $v$  — скорость ветра,  $c$  — коэффициент электромеханического взаимодействия,  $\omega_0$  — минимальная угловая скорость, при которой генератор начинает работать,  $R$  — сопротивление генератора,  $\eta$  — КПД блока управления током,  $r_1 + r_2$  — сопротивления во внутренней цепи аккумулятора,  $U_0$  — напряжение разомкнутого контура в начальный момент времени,  $J$  — момент инерции

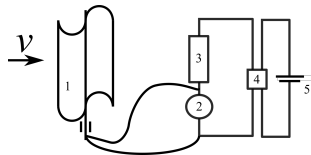


Рис. 1: Эскиз механической системы.

Уравнения стационарного режима выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 C_m(\omega) &= k[(\omega - \omega_0) - \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 - JI_2^2(r_1 + r_2) - JI_2U_{oc}}] \\
 (2) \quad I_2(r_1 + r_2) &= U_2 - U_{oc} \\
 k &= \frac{c^2}{b\rho S v^2 R}, \quad J = \frac{4R}{c^2 \eta}.
 \end{aligned}$$

Определены характеристики стационарных режимов системы при различных зарядных токах. Показано, что система имеет только одно стационарное решение. Разработан алгоритм управления током для реализации стабильной зарядки аккумулятора. Определены параметры математической модели.

### 3. Заключение

В данной работе построена математическая модель электромеханической системы, состоящей из ротора Савониуса, генератора, блока управления током и аккумулятора. Путем управления зарядным током были получены стационарные режимы работы системы при различных значениях зарядного тока. На основе экспериментальных данных были определены параметры модели. Расчеты модели хорошо согласуются с экспериментами. Результаты, полученные в этой работе, могут послужить теоретической основой для проектирования автоматических систем контроля зарядки аккумулятора.

### Список литературы

1. *Fujisawa N.* On the Torque Mechanism of Savonius Rotors // *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1992. V. 40. P. 277–292.
2. *Буданов В.М., Голуб А.П., Досаев М.З., Семюцкий Ю.Д.* О влиянии стабилизатора тока на динамику малой гибридной ветроэнергетической установки // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2024. Т. 25, № 11. С. 603–611.

### On Battery Charging Control

*S. Lu, M. Z. Dosaeв, R. M. Shcherbov*

Lomonosov Moscow State University, Russia  
 lusilong36@gmail.com , dosayev@imec.msu.ru, romanbt405@gmail.com

Recently, most rovers use solar panels for charging. However, in polluted atmospheres, wind power remains the only viable solution for charging

rovers. To ensure stable battery charging, a charging current control system was developed. A mathematical model of the electromechanical system was developed. An experimental study of the charging process of a rover equipped with a Savonius rotor wind turbine was conducted in the wind tunnel of the Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University. Steady-state conditions of the system for various battery states were obtained in experiments. Based on the experimental data, the parameters of the mathematical model were determined. The model calculations are in good agreement with the experimental data.

---

УДК 517.9

## **Функционал Ляпунова с заданной производной для параболического уравнения с запаздыванием**

*П. Е. Маковеева*

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия  
p.e.makoveeva@spbu.ru

В работе рассматривается краевая задача типа Дирихле для уравнения параболического типа с запаздыванием. Целью является построение функционала Ляпунова, позволяющего исследовать экспоненциальную устойчивость решения и получить явную оценку скорости затухания. В работе используется функционал с простейшей заданной производной, после чего вводится его модификация, обеспечивающая двусторонние оценки.

*Ключевые слова:* уравнение параболического типа, уравнение с запаздыванием, функционал Ляпунова, экспоненциальная устойчивость.

### **1. Введение**

Метод Ляпунова является фундаментальным инструментом исследования устойчивости дифференциальных уравнений. Для систем с запаздыванием его естественным обобщением служит метод функционалов Ляпунова–Красовского, в рамках которого рассматриваются функционалы, зависящие от состояния системы на интервале запаздывания.

Одним из направлений развития этого метода является построе-

ние функционалов по заданной производной [1]. Такие функционалы позволяют получить оценки решений и исследовать экспоненциальную устойчивость.

В работе рассматривается система с распределенными параметрами и запаздыванием

$$(1) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = au_{xx}(x, t) + bu(x, t - h), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, \theta) = \varphi(x, \theta), & \theta \in [-h, 0], \quad x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Здесь  $\varphi$  — начальная функция, для простоты мы предполагаем, что она абсолютно непрерывна,  $a > 0$ ,  $b \neq 0$  — параметры модели,  $h > 0$  — запаздывание. Система включает уравнение параболического типа с запаздыванием, однородные граничные и некоторые начальные условия. Подобные системы используются при описании биологических процессов, например, динамики популяций и распространении эпидемий [2].

Далее решения системы рассматриваются как функции, принимающие значения в пространстве Лебега  $L_2(0, 1)$ . Через  $\|\cdot\|_{L_2}$  обозначается норма этого пространства:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2}^2 = \int_0^1 u^2(x, t) dx.$$

Для каждого  $t \geq 0$  определим отображение  $\hat{u}_t$  из отрезка  $[-h, 0]$  в  $L_2(0, 1)$ , задаваемое равенством  $\hat{u}_t(\theta) = u(\cdot, t + \theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ . Элемент  $\hat{u}_t$  далее рассматривается как состояние системы в момент времени  $t$ .

## 2. Построение функционала по заданной производной

Построим сначала функционал  $v_0$ , производная которого имеет вид

$$\frac{d}{dt}v_0(\hat{u}_t) = -\|u(\cdot, t)\|_{L_2}^2,$$

то есть является неположительной квадратичной формой. Явный вид этого функционала представлен в работе [3].

Далее рассмотрим функционал

$$v(\varphi) = \int_0^\infty \omega(\hat{u}_t(\varphi)) dt,$$

где  $\omega$  — квадратичный функционал следующего вида:

$$\omega(\varphi) = W_0 \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 + W_1 \|\varphi(\cdot, -h)\|_{L_2}^2 + W_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\cdot, \theta)\|_{L_2}^2 d\theta,$$

где  $W_0, W_1, W_2 > 0$ . В явном виде функционал  $v$  выражается через  $v_0$  и интегральный член, зависящий от  $\varphi$ .

### 3. Экспоненциальные оценки решений

Следующий функционал, в отличие от функционала  $v$ , допускает строго положительную оценку снизу в случае экспоненциальной устойчивости:

$$\tilde{v}(\varphi) = v(\varphi) + \varepsilon_1 \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 + \varepsilon_2 \int_{-h}^0 \|\varphi(\cdot, s)\|_{L_2}^2 ds,$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ . Можно показать, что функционал допускает следующую двустороннюю оценку:

$$\alpha_1 \left( \|\varphi(\cdot, 0)\|^2 + \int_{-h}^0 \|\varphi(\cdot, \theta)\|^2 d\theta \right) \leq v(\varphi) \leq \alpha_2 \left( \|\varphi(\cdot, 0)\|^2 + \int_{-h}^0 \|\varphi(\cdot, \theta)\|^2 d\theta \right),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  и зависят от коэффициентов  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, W_0, W_1, W_2$  и параметров исходной системы. Кроме того, производная функционала вдоль решений краевой задачи удовлетворяет неравенству

$$\frac{d}{dt} \tilde{v}(\hat{u}_t) \leq -\beta \tilde{v}(\hat{u}_t),$$

где коэффициент  $\beta > 0$  выражается через параметры системы и выбранные  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

Из полученных оценок следует экспоненциальная оценка

$$\|u(\cdot, t)\| \leq M e^{-\sigma t} \left( \|\varphi(\cdot, 0)\|_{L_2}^2 + \int_{-h}^0 \|\varphi(\cdot, \theta)\|_{L_2}^2 d\theta \right)^{1/2},$$

где  $\sigma = \beta/2$ , а  $M = \sqrt{\alpha_2/\alpha_1}$ .

Полученная экспоненциальная оценка решения выводится в предположении экспоненциальной устойчивости краевой задачи (1). При

этом структура функционала  $\tilde{v}$  показывает, что в случае существования неотрицательной нижней оценки для исходного функционала  $v$ , модифицированный функционал  $\tilde{v}$  допускает строго положительную нижнюю оценку, что влечет экспоненциальную устойчивость системы.

Разработка методов получения строгой нижней оценки функционала  $v$  является направлением дальнейших исследований.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 23-71-10099), <https://rscf.ru/project/23-71-10099/>.

#### Список литературы

1. *Kharitonov V.L.* Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices. Basel: Birkhäuser, 2013.
2. *Othmer H.G., ed.* Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry // Proc. Univ. of Utah, May 9–11, 1985. V. 66. Dordrecht: Springer, 2013.
3. *Makoveeva P.E., Egorov A.V.* Lyapunov–Krasovskii Functional With Prescribed Derivative and Lyapunov Matrix for Delay System With Distributed Parameters // Proc. 44th Chinese Control Conference (CCC). Chongqing, China, 2025. P. 1120–1125.

### Lyapunov Functional and Exponential Estimate Of the solution Of a parabolic Equation With Delay

*P. E. Makoveeva*

St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia  
[p.e.makoveeva@spbu.ru](mailto:p.e.makoveeva@spbu.ru)

This paper considers a Dirichlet boundary value problem for a parabolic equation with delay. The goal is to construct a Lyapunov functional that allows us to investigate the exponential stability of the solution and obtain an explicit estimate of the decay rate. The paper uses a functional with the simplest prescribed derivative, after which a modification is introduced that provides two-sided estimates.

---

## О модификации электродинамического метода трехосной стабилизации спутника на полярных орбитах

*М. В. Максименко, А. А. Тихонов*

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия  
m.v.maksimenko@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

Рассматривается спутник (ИСЗ), движущийся по кеплеровой круговой полярной орбите. Для трехосной стабилизации ИСЗ применяется электродинамическая система управления (ЭДСУ). Ранее выполненные исследования показали ограниченность возможностей и трудности реализации ЭДСУ для ИСЗ, движущихся по околополярным и полярным орбитам. Предлагается модификация ЭДСУ, позволяющая преодолеть отмеченные трудности.

*Ключевые слова:* спутник, лоренцев момент, магнитный момент, трехосная стабилизация, оптимизация, полярная орбита

### 1. Введение

Для трехосной стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат, в том числе в непрямом положении равновесия и в более сложных программных режимах углового движения может применяться электродинамический метод управления, основанный на одновременном использовании двух моментов, оказывающих влияние на динамику вращательного движения ИСЗ в магнитном поле Земли (МПЗ), а именно — лоренцева момента и момента магнитного взаимодействия [1]. Ранее выполненные исследования показали ограниченность возможностей ЭДСУ для ИСЗ, движущихся по полярным и околополярным орбитам в силу наличия в этом случае таких областей в околоземном пространстве, в которых возможно совпадение линий действия вектора геомагнитной индукции и вектора скорости ИСЗ относительно МПЗ. Поэтому актуальна рассматриваемая далее задача преодоления отмеченных трудностей. Исследование проводится без ограничений на точность аппроксимации модели МПЗ. Предлагается модификация ЭДСУ, основанная, во-первых, на оптимизации управления угловым движением ИСЗ и, во-вторых, на ограничении максимальной величины модуля вектора центра заряда относительно центра масс ИСЗ, который необходимо создавать в процессе управления. Рекомендован способ выбора параметров для модифицированной ЭДСУ. Результаты компьютерного моделирования демонстрируют работоспособность

предложенной модификации ЭДСУ и свидетельствуют о возможности технической реализации модифицированной ЭДСУ.

## 2. Основной результат

Концепция построения ЭДСУ опирается на возможность управляемого изменения двух ключевых векторных параметров, а именно  $\vec{P}$  и  $\vec{I}$  для создания управляющих моментов — лоренцева  $\vec{M}_L = \vec{P} \times \vec{T}$  и момента магнитного взаимодействия  $\vec{M}_M = \vec{I} \times \vec{B}$ , обеспечивающих программное угловое движение ИСЗ [1]. Здесь  $\vec{P} = Q\vec{\rho}_0$ ,  $Q$  — заряд ИСЗ,  $\vec{\rho}_0$  — радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно центра масс ИСЗ,  $\vec{T} = \mathbf{A}^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$ , векторы  $\vec{v}_C$  (скорость центра масс ИСЗ относительно геомагнитного поля) и  $\vec{B}$  (вектор магнитной индукции) заданы в орбитальной системе координат  $C\xi\eta\zeta$ , а  $\mathbf{A}$  — матрица направляющих косинусов для перехода от главных центральных осей инерции ИСЗ к осям  $C\xi\eta\zeta$ . При заданных параметрах орбиты и выбранной модели геомагнитного поля  $\vec{v}_C$  и  $\vec{B}$  являются известными функциями времени.

При стабилизации ИСЗ в системе  $C\xi\eta\zeta$  в заданной ориентации  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$  управляемые векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{I}$  содержат три компоненты: восстанавливающую, диссипативную и компенсирующую

$$\vec{P} = \vec{P}_{rest} + \vec{P}_{diss} + \vec{P}_{comp}, \quad \vec{I} = \vec{I}_{rest} + \vec{I}_{diss} + \vec{I}_{comp}$$

для создания одноименных компонент управляющих моментов.

Актуальным является вопрос о практической реализуемости построенного управления. Вопрос о реализуемости управляемого вектора  $\vec{I}$  достаточно хорошо изучен. В то же время вопрос о реализуемости вектора  $\vec{P}$  требует особого внимания ввиду наличия конструктивных ограничений на величины  $Q$  и  $|\vec{\rho}_0|$ . Анализ результатов компьютерного моделирования показывает, что, во-первых, по мере приближения наклона орбиты  $i$  к  $90^\circ$  значения  $|\vec{\rho}_0|$  стремительно нарастают и оказываются недопустимо большими по сравнению с размерами ИСЗ, и, во-вторых, наибольший вклад в длину вектора  $\vec{\rho}_0$  вносит компонента  $\vec{P}_{rest}$ . Поэтому требуется модификация метода, и в первую очередь она должна быть направлена на ограничение составляющей  $\vec{P}_{rest}$ .

Рассмотрены два варианта модификации ЭДСУ. Первый вариант направлен на синтез такого управления, при котором вместо вектора  $\vec{P}_{rest} = Qk_L \vec{T}_0$ , где  $\vec{T}_0 = \mathbf{A}_0^\top \vec{T}$ , будет создаваться только составляющая  $\vec{P}_{rest}^\perp$ , ортогональная вектору  $\vec{T}$  и определяемая по формуле

$$\vec{P}_{rest}^\perp = \vec{P}_{rest} - \vec{P}_{rest}^\parallel = Qk_L \left( \vec{T}_0 - (\vec{T}_0 \cdot \vec{T}) \frac{\vec{T}}{|\vec{T}|^2} \right).$$

Как показывают численные эксперименты, предложенная модификация позволяет существенно (для околополярных орбит — в среднем на порядок) уменьшить  $|\vec{P}|$ . Однако, величина  $|\vec{\rho}_0|$  может достигать неприемлемо больших значений. Это обстоятельство связано с тем, что при наклонениях орбиты, близких к  $90^\circ$ , имеются такие точки на орбите ИСЗ, в которых возможно совпадение линий действия векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{v}_C$ . В результате, в этих точках вектор  $\vec{T}$  становится близком к нулевому, а эффективность управляющего момента  $\vec{M}_L$  резко падает.

Учитывая, что упомянутые падения являются кратковременными, предлагается модифицировать закон управления таким образом, чтобы вместо величины  $|\vec{T}|$  в него входила модифицированная норма  $|\vec{T}|_{mod}$ , вычисляемая по формуле  $|\vec{T}|_{mod} = \frac{1}{2}(|\delta - |\vec{T}|| + \delta + |\vec{T}|)$ , где  $\delta = \min_t(|\vec{T}|_{i=0}) \approx 0.12$ . Установлено, что предложенная модификация управления с нормой  $|\vec{T}|_{mod}$  позволяет гарантированно ограничить  $|\vec{\rho}_0|$  в процессе генерирования управляющего лоренцева момента и тем самым обеспечить реализуемость лоренцева момента для ИСЗ, движущихся, в том числе, по полярным и околополярным орбитам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 24-41-02031), <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>.

### Список литературы

1. *Tikhonov A.A., Giri D.K., Maksimenko M.V., Klyushin M.A.* Combining Magnetic and Lorentz Attitude Control Systems to Solve Five Satellite Stabilization Problems // *Cybernetics and Physics*. 2025. V. 14. No. 1. P. 74–82.

## On Modification of the Electrodynamic Method of Triaxial Satellite Attitude Stabilization in Polar Orbits

*M. V. Maksimenko, A. A. Tikhonov*

Saint Petersburg State University, Russia  
 m.v.maksimenko@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

A satellite moving in a Keplerian circular polar orbit is considered. An electrodynamic control system (EDCS) is used for the three-axis attitude stabilization of the satellite. Previous studies have shown the limited possibilities and difficulties of implementing EDCS for satellites moving in circumpolar and polar orbits. A modification of the EDCS is proposed to overcome these difficulties.

## Задача быстрогодействия на группе вращений трехмерного пространства с управлением в полукруге

*А. П. Маштак*

ИПС им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия  
alexey.mashtakov@gmail.com

Рассматривается задача быстрогодействия на группе вращений трехмерного пространства. Задача есть вариация субримановой задачи, в которой множество допустимых управлений (круг) заменено на полукруг. Такая постановка возникает при управлении моделью мобильного робота на поверхности сферы и имеет приложение в обработке изображений. Доказана полная управляемость и существование оптимальных траекторий. Из принципа максимума Понтрягина получена гамильтонова система, задающая экстремали. Система проинтегрирована в явном виде: найдена параметризация аномальных и нормальных экстремалей. Исследована оптимальность аномальных и некоторых нормальных экстремалей.

*Ключевые слова:* Группа вращений, управление в полукруге, задача быстрогодействия, экстремали.

### 1. Введение

Рассмотрим твердое тело в пространстве  $\mathbb{R}^3$  с ортонормированной системой координат  $O_{xyz}$ . Ориентация тела определяется вращением  $w \in SO(3)$ , под действием которого базисный репер  $\{e_x, e_y, e_z\}$  переходит в репер, прикрепленный к телу:  $\{e_x^b, e_y^b, e_z^b\} = w \{e_x, e_y, e_z\}$ . Рассматривается задача о наискорейшей переориентации тела при заданных ограничениях: ось вращения в каждый момент времени лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $e_z^b$ ; вращение осуществляется с не более чем единичной угловой скоростью; компонента вращения вокруг вектора  $e_x^b$  неотрицательна.

Задача есть вариация субримановой (СР) задачи на  $SO(3)$  [1, 2]. В СР задаче управление принимает значения в круге. В нашей постановке управление принадлежит полукругу. Такая постановка востребована в робототехнике и обработке изображений. Исследуемая управляемая система задает модель автомобиля, движущегося по поверхности

сферы. Автомобиль имеет два параллельных колеса, равноудаленных от центра масс, который совпадает с серединой оси колесной пары. Оба колеса имеют независимые приводы, которые могут вращаться вперед и назад, так что соответствующее качество колес происходит без проскальзывания. Конфигурация системы описывается тройкой  $g = (\phi, \psi, \theta) \in S^2 \times S^1$ , где  $(\phi, \psi) \in S^2$  — центральная точка, а  $\theta \in S^1$  — угол ориентации автомобиля, совпадающий с направлением колес. Траектории такой системы используются для поиска выделяющихся кривых на сферических изображениях [3]. Родственная задача быстрогодействия на группе Ли  $SE(2)$  исследована в [4].

## 2. Постановка задачи

Группа вращений трехмерного пространства задается матрицами  $SO(3) = \left\{ w \in \text{Mat}(3) \mid ww^T = \text{Id}, \det w = 1 \right\}$ .

Рассматривается следующая задача быстрогодействия:

$$(1) \quad \dot{w} = u_1 X_1(w) + u_2 X_2(w), \quad w(0) = \text{Id}, \quad w(t_1) = w_1, \quad t_1 \rightarrow \min,$$

где  $X_1, X_2$  — базисные левоинвариантные векторные поля, а управление принимает значения из полукруга  $U = \{u_1^2 + u_2^2 \leq 1, u_1 \geq 0\}$ . Векторные поля  $X_1$  и  $X_2$  задаются при помощи инфинитезимальных поворотов  $A_1$  и  $A_2$  вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно:  $X_i = wA_i$ .

## 3. Основные результаты

Методами геометрической теории управления исследована полная управляемость и существование оптимальных траекторий.

**Теорема 1.** *В задаче быстрогодействия (1) для любого конечного состояния  $w_1 \in SO(3)$  существует оптимальная траектория.*

Группу  $SO(3)$  удобно параметризовать единичными кватернионами

$$S^3 = \left\{ q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} \mid q_i \in \mathbb{R}, q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \right\}.$$

Сфера  $S^3$  есть двулистное накрытие группы  $SO(3)$ . Экстремальные траектории на  $S^3$  проецируются в экстремальные траектории на  $SO(3)$ . Для этого используется выражение матрицы вращения через кватернион. При этом пара  $\pm q$  соответствует единственной матрице  $w$ .

Принцип максимума Понтрягина дает гамильтонову систему

$$(2) \quad \dot{q} = qu, \quad \dot{h} = hu - uh, \quad \text{где } u = \frac{u_1}{2} \mathbf{i} + \frac{u_2}{2} \mathbf{j}, \quad h = h_1 \mathbf{i} + h_2 \mathbf{j} + h_3 \mathbf{k}.$$

**Теорема 2.** *Аномальное экстремальное управление имеет вид  $u_1(t) = 0$ ,  $u_2(t) \in [-1, 1]$  — произвольная функция  $L_\infty([0, T], [-1, 1])$ . Аномальные экстремальные траектории имеют вид*

$$q(t) = \cos \frac{U(t)}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{U(t)}{2}, \quad U(t) = \int_0^t u_2(\tau) d\tau.$$

*Аномальные оптимальные траектории имеют вид*

$$q(t) = \cos \frac{t}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{t}{2}, \quad t \leq \pi.$$

В нормальном случае экстремальное управление выражается

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (0, \operatorname{sign} h_2), & \text{при } h_1 < 0, \\ (h_1, h_2), & \text{при } h_1 \geq 0, h_1^2 + h_2^2 > 0. \end{cases}$$

Сопряженная часть имеет следующие первые интегралы: гамильтониан  $H = \begin{cases} |h_2|, & \text{при } h_1 < 0, \\ \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, & \text{при } h_1 \geq 0, \end{cases}$  и функцию Казимира  $E = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ . Совместно с интегралом  $G = qhq^{-1}$  они образуют полную систему. Следовательно, система (2) интегрируема по Лиувиллю.

Найдено явное выражение экстремалей. Траектории движения «машины на сфере» имеют следующий вид.

Если  $E = 1$ , то движение с постоянным управлением.

Если  $E > 1$ , то движение делится на фазы:

- Движение по СР геодезической. Длительность фазы:  $\frac{\pi}{\sqrt{E-1}}$ .
- Поворот на месте. Длительность полной фазы:  $\pi$

Получены условия оптимальности экстремальных траекторий. Благодаря выполнению усиленного условия Лежандра малые дуги нормальных экстремалей оптимальны. В случаях, когда  $u_1 = 1$  или  $u_2 = \pm 1$ , экстремальные траектории являются вращениями вокруг оси  $\mathbf{i}$  или  $\mathbf{j}$  соответственно. Оптимальным является вращение на угол  $t \leq \pi$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 25-21-00681), <https://rscf.ru/project/25-21-00681/>.

## Список литературы

1. *Boscain U., Rossi F.* Invariant Carnot–Caratheodory Metrics on  $S^3$ ,  $SO(3)$ ,  $SL(2)$  and Lens Spaces // *SIAM J. Control Optim.* 2008. V. 47. P. 1851–1878.
2. *Берестовский В.Н., Зубарева И.А.* Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли  $SO(3)$  // *Сиб. матем. журн.* 2015. Т. 56. № 4. С. 762–774.
3. *Mashtakov A., Dwits R., Sachkov Y. et al.* Tracking of Lines in Spherical Images via Sub-Riemannian Geodesics in  $SO(3)$  // *J. Math. Imaging Vis.* 2017. V. 58. P. 239–264.
4. *Маштаков А.П.* Задача быстрогодействия на группе движений плоскости с управлением в полукруге // *Матем. сб.* 2022. Т. 213. № 4. С. 100–122.

## Time-Optimal Problem on the Group of 3D Rotations

*A. P. Mashtakov*

Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Preslavl-Zalesskiy, Russia  
alexey.mashtakov@gmail.com

We consider a time-optimal problem on the group of rotations of three-dimensional space. The problem is a variation of a sub-Riemannian problem in which the set of admissible controls (a disk) is replaced by a half-disk. This formulation arises when controlling a model of a mobile robot on a sphere and has applications in image processing. We prove complete controllability and existence of optimal trajectories. We apply Pontryagin maximum principle and derive a Hamiltonian system for extremals. We integrate this system explicitly and provide parameterization of abnormal and normal extremals. Finally, we study optimality of abnormal and some normal extremals.

---

## **К аналитической и численной оптимизации для получения двухкубитных вентилях на унитарной динамике**

*О. В. Моржин*

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия  
morzhin.oleg@yandex.ru

Планируется, что в докладе сначала будет кратко описано направление по математическому моделированию оптимального управления для квантовых систем, а затем кратко описаны некоторые недавние результаты автора по задачам получения двухкубитных вентилях на динамике, определяемой уравнением Шредингера с управлениями.

*Ключевые слова:* конечномерное уравнение Шредингера, управление, квантовые вентилях, оптимизация

### **1. Введение**

Математическое моделирование управления квантовыми системами является важным научным направлением, использующим результаты из математики, физики, в т.ч. через адаптацию таких результатов из математической теории конечномерной и бесконечномерной оптимизации, как, напр., принцип максимума Понтрягина, градиентные методы оптимизации. В связи с теорией по обработке квантовой информации, квантовым вычислениям, квантовой мехатроникой отмечаем направление по исследованию математических задач получения квантовых вентилях на унитарной или диссипативной квантовой динамике, зависящей от управлений, напр., в [1–5], причем важно здесь отметить разные аспекты, напр., геодезический подход ([5] и др.).

Планируется основную часть доклада посвятить некоторым недавним результатам автора в связи с разрабатываемой им статьей по аналитическому и численному исследованию задач оптимизации управлений по получению двухкубитных вентилях на решениях уравнения Шредингера с 4 уровнями (т.е. без дополнительных уровней).

### **2. Задачи получения квантовых вентилях на решениях уравнения Шредингера. Исследование задач**

Рассматривается начальная задача для  $N$ -уровневого уравнения Шредингера с гамильтонианом, содержащим управление:

$$(1) \quad \frac{dU^c(t)}{dt} = -i \left( H_0(p) + \sum_{l=1}^{N_u} V_l u_l(t) \right) U^c(t), \quad U^c(0) = I_N, \quad t \in [0, T].$$

Здесь  $H_0(p)$ ,  $V_1, \dots, V_{N_u}$  — эрмитовы матрицы порядка  $N$ ,  $U^c(t)$  — для каждого  $t$  это унитарная матрица порядка  $N$ ,  $u = (u_l)_{l=1}^{N_u}$  — вещественная векторная управляющая функция (физически означает когерентное управление),  $p \in P \subset \mathbb{R}^p$  — вектор заданных / управляющих параметров, постоянная Планка условно взята равной 1. Буква «с» при  $U$  означает, напр.,  $(T, u)$ . Как в [3, разд. 2], наложено ограничение

$$u(t) \in Q_u(t) = \bigtimes_{l=1}^{N_u} [-b_l(t), b_l(t)], \quad b_l = \bar{b}_l \operatorname{sinc}\left(2^q \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)^q\right), \quad t \in [0, T],$$

где  $\bar{b}_l > 0$ ,  $q \in [3, 8] \subset \mathbb{N}$ , что дает  $u(0) = u(T) = 0$ . Для заданного вентиля  $W \in U(N)$  рассматриваются следующие инвариантные к глобальной фазе известные невязки для сравнения унитарных матриц (причем интересно сравнить невязки между собой с алгебраической, геометрической и др. точек зрения, также в смысле диапазонов чувствительности невязок):

- 1)  $E_{\text{abs}}(U; W) = 1 - \frac{1}{N^2} |\langle W, U \rangle_F|^2 = 1 - \frac{1}{N^2} |\operatorname{Tr}(W^\dagger U)|^2 \in [0, 1]$ ;
- 2)  $E_{\text{ln}}(U; W) = \frac{1}{\sqrt{N}\pi} \|\operatorname{Ln}(\operatorname{proj}_{SU(N)}(W^\dagger U))\|_F \in [0, 1]$  (негладкая);
- 3)  $E_{\text{diam}}(U; W) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(\operatorname{spec}(W^\dagger U)) \in [0, 1]$  (негладкая).

Здесь можно рассматривать разнообразные задачи оптимизации.

*Задача 1.* Пусть  $T, p$  заданы, надо минимизировать целевой функционал  $J(u) = E_{\text{abs}}(U^u(T); W)$ , считаем  $u$  кусочно-непрерывным; при необходимости меняем  $T$ , ориентируясь на цель сделать  $J \approx 0$ .

*Задача 2.* Пусть  $u = 0$ , а  $(T, p)$  — вектор управляющих параметров, надо минимизировать целевую функцию  $f(T, p) = E_{\text{abs}}(U^{T,p}(T); W)$ .

*Задача 3.* Пусть  $p$  задан,  $u$  кусочно-постоянное. Целевая функция неотрицательная, является линейной сверткой срезов для  $E_{\text{abs}}$ ,  $E_{\text{ln}}$ ,  $E_{\text{diam}}$ , т.е.  $E_{\text{abs},\delta} = \max(E_{\text{abs}}(U^{T,u}(T); W) - \delta_{E_{\text{abs}}}, 0)$  и т.д., и, скажем, регуляризатора  $\operatorname{TVH}_{\delta_{\operatorname{TVH}}} = \max(\sum_{l,j} \operatorname{Huber}_{\delta_{\operatorname{TVH},1}}(u_l(t_j), u_l(t_{j+1})) - \delta_{\operatorname{TVH},2}, 0)$  (с функцией Хубера). Надо оптимизировать  $(T, u)$ .

Рассматривается двухкубитный случай ( $N = 4$ ), взяты гамильтонианы (25), (27) из [1] и (6.16) из [2], зависящие от управлений и существенно разные физически (планируется эти различия описать). Автором рассматривается набор из 29 известных непараметризованных двухкубитных вентилях, который разделяется на 11 классов локальной эквивалентности (в терминах разложения Картана, камеры Вейля), а также некоторые известные параметризованные двухкубитные вентили. Для задачи 1 автором показано аналитически, при каких условиях

$u = 0$  является особым, удовлетворяет поточечному условию принципа максимума Понтрягина (используя известные [3, разд. 2] формулы для функционального градиента, сопряженной системы), и др. Для задачи 2 автором получены точные явные формулы для наборов пар  $(T, p)$  такие, что с одним из рассматриваемых гамильтонианов получается, что точно  $E(U^{T,p}(T); W) = 0$  для определенных параметризованных двухкубитных вентилях. Для задачи 3 автором развивается подход с кусочно-постоянными управлениями, программированием на Python, таким применением `scipy.optimize.dual_annealing`, что метод обобщенной имитации отжига (Generalized Simulated Annealing), будучи методом нулевого порядка для стохастического глобального поиска, объединяется, как вариант, с методом COBYLA Пауэлла (есть в SciPy), т.е. с локальным методом нулевого порядка, использующим линейные аппроксимации и т.д. При кусочно-постоянном  $u$ , как известно, решения задачи (1) представляются по точной формуле в виде произведения матричных экспонент; для последних используется аппроксимация Паде через `expm` из SciPy. Планируется дать комментарии по настройке параметров целевой функции и методов, по анализу влияния отклонений от итоговых управлений.

#### Список литературы

1. *Schirmer S.* Implementation of Quantum Gates via Optimal Control // J. Mod. Opt. 2009. V. 56. No. 6. P. 831–839.
2. *Goerz M.H.* Optimizing Robust Quantum Gates in Open Quantum Systems: Diss. Dr. rer. Nat. (Advisor: Prof. Dr. C.P. Koch). Univ. Kassel, 2015.
3. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Gradient Projection Method for Constrained Quantum Control // J. Phys. A. 2025. V. 58, No. 13. Art. No. 135303.
4. *Korolev I.M., Pechen A.N.* Numerical Analysis of Quantum Control Landscapes for Single-Qubit Gate Generation in Three-Level Fluxonium Systems // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46. P. 2581–2590.
5. *Lewis D., Wiersema R., Carrasquilla J., Bose S.* Geodesic Algorithm for Unitary Gate Design With Time-Independent Hamiltonians // Phys. Rev. A. 2025. V. 111. Art. no. 052618.

### To Analytical and Numerical Optimization for Obtaining Two-Qubit Gates on Unitary Dynamics

*O. V. Morzhin*

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia  
 morzhin.oleg@yandex.ru

It is planned that the talk will first briefly describe the direction of mathematical modeling of optimal control for quantum systems, and

then briefly describe the author's some recent results for the problems of obtaining two-qubit gates on dynamics determined by the Schrödinger equation with controls.

---

УДК 517.911.5

## **Критерии устойчивости периодических разностных включений**

*М. В. Морозов*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
granmiguel@mail.ru

Рассматриваются периодические селекторно-линейные разностные включения. Построены функции Ляпунова из параметрического класса однородных форм четной степени. Эти функции устанавливают необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости и могут быть использованы при разработке численных методов исследования устойчивости систем, эквивалентных рассматриваемым разностным включениям. С использованием кусочно-линейных функций Ляпунова получен алгебраический критерий асимптотической устойчивости.

*Ключевые слова:* периодические селекторно-линейные разностные включения, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова, алгебраический критерий асимптотической устойчивости.

### **1. Введение**

Исследование дискретных систем управления в ряде случаев приводит к разностным включениям. В [1] дан краткий обзор публикаций на эту тему, для периодических разностных включений на основе вариационного подхода получено необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения. В [2] для периодических селекторно-линейных разностных включений выделены параметрические классы кусочно-квадратичных и кусочно-линейных функций Ляпунова, получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости. Данная работа является продолжением [1,2] и посвящена получению новых критериев асимптотической устойчивости периодических селекторно-линейных разностных включений на основе метода функций Ляпунова.

## 2. Основные результаты

Рассмотрим периодическое селекторно-линейное разностное включение вида

$$(1) \quad x(s+1) \in F(s, x(s)), \quad F(s, x) = \{y : y = B(s)x, B(s) \in \Omega(s)\},$$

где  $\Omega(s)$ ,  $s = 0, 1, \dots$  — выпуклое компактное множество действительных  $(n \times n)$  матриц.  $\Omega(s+N) = \Omega(s)$ ,  $N$  — натуральное число. Будем называть решением  $x(s)$  включения (1) последовательность векторов  $\{x(s)\}$ , удовлетворяющую при всех  $s = 1, 2, \dots$  включению (1). Последовательность  $\{x(s)\} : x(s) = 0$  является положением равновесия  $x(s) \equiv 0$  включения (1). Для включения (1) в [1] была доказана эквивалентность свойств асимптотической устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости, равномерной экспоненциальной устойчивости. Учитывая это, везде далее будем говорить об асимптотической устойчивости включения (1).

В [2] для включения (1) рассматривались параметрические классы кусочно-квадратичных

$$(2) \quad V_M(s, x) = \max_{1 \leq j \leq M} \langle l^j(s), x \rangle^2, \quad l^j(s+N) = l^j(s)$$

и кусочно-линейных

$$(3) \quad V_M(s, x) = \max_{1 \leq j \leq M} |\langle l^j(s), x \rangle|, \quad l^j(s+N) = l^j(s)$$

функций Ляпунова, устанавливающих необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости включения (1). В [2] было доказано, что для асимптотической устойчивости включения (1) необходимо и достаточно, чтобы при некотором целом  $M \leq n$  существовала периодическая по  $s$  (периода  $N$ ), функция Ляпунова  $V_M(s, x)$  вида (2) или (3), удовлетворяющая условию

$$(4) \quad \text{rank} L(s) = n \leq M, \quad L(s) = \left( l^1(s), \dots, l^M(s) \right),$$

и неравенству

$$(5) \quad \max_{y \in F(s,t)} V_M(s, y) \leq \theta V_M(s, x), \quad x \in R^n,$$

при всех  $x \in R^n$ ,  $s \geq 0$  и некотором  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ).

Рассмотрим периодические по  $s$  функции Ляпунова из класса однородных форм степени  $2r$  ( $2r$  — число):

$$(6) \quad V_{M,r}(s, x) = \sum_{j=1}^M \left\langle l^j(s), x \right\rangle^{2r}, \quad l^j(s+N) = l^j(s), \quad s = 1, 2, \dots$$

Условием положительной определенности функции (6), как и для функций (2), (3), является условие (4). При выполнении этого условия функция  $V_{M,r}(s, x)$  будет строго выпуклой по  $x \in R^n$  при всяком  $s \geq 0$ .

**Теорема 1.** *Для асимптотической устойчивости включения (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала периодическая по  $s$  (с периодом  $N$ ) функция Ляпунова  $V_{M,r}(s, x)$  вида (6), для которой при некотором целом  $r \geq 1$  выполнено неравенство (5), а векторы  $l^j(s)$  ( $l^j(s+N) = l^j(s)$ ),  $j = \overline{1, M}$  при всех  $s \geq 0$  удовлетворяют условию (4).*

С помощью функций Ляпунова (3) получен критерий асимптотической устойчивости включения (1) в алгебраической форме.

**Теорема 2.** *Для асимптотической устойчивости включения (1) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:*

1. *При некотором натуральном  $p \geq 1$  найдлись такие периодические  $(n \times n)$ -матрицы  $B_i(s)$  ( $B_i(s+N) = B_i(s)$ ,  $i = \overline{1, p}$ ), удовлетворяющие условию  $B(s) \in \text{co}(B_1(s), \dots, B_p(s))$ ,  $s = 0, 1, \dots$*

2. *Найдлись число  $M$ , периодическая  $(n \times M)$ -матрица  $L(s)$  ранга  $n$  ( $L(s+N) = L(s)$ ) и периодические  $(M \times M)$  матрицы  $D_i(s)$ ,  $i = \overline{1, p}$  ( $D_i(s+N) = D_i(s)$ ), удовлетворяющие условиям  $\|D_i(s)\|_\infty < 1$ ,  $i = \overline{1, p}$ ,  $s = 0, 1, \dots$ , что выполняются матричные соотношения*

$$(7) \quad B'_i(s)L(s+1) = L(s)D'_i(s), \quad i = \overline{1, p}, \quad s = 0, 1, \dots$$

### Список литературы

1. *Morozov M.V. On the Stability of Periodic Difference Inclusions // Advances in Systems Science and Applications, 2022. No. 1. P. 167–175.*
2. *Morozov M.V. Lyapunov Functions for Periodic Selector-Linear Difference Inclusions // Advances in Systems Science and Applications. 2024. No. 2. P. 187–191.*

## Stability Criteria for Periodic Difference Inclusions

*M. V. Morozov*

Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia  
granmiguel@mail.ru

Periodic selector-linear difference inclusions are considered. Lyapunov functions from a class of homogeneous forms are constructed. These functions establish necessary and sufficient conditions of asymptotic stability and can be used in the development of numerical methods for investigating the stability of the systems equivalent to the considered difference inclusions. Using piecewise linear Lyapunov functions, an algebraic criterion of stability is obtained. An example of a mechanical system leading to periodic selector-linear difference inclusion is considered.

---

УДК 517.925.42,517.911.5,519.718.2

### **Анализ циклов в системе 3-го порядка с разрывной правой частью и двумя вложенными сатураторами**

*Ю. В. Морозов*

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия  
tot1983@ipu.ru

В работе аналитически найдены скрытые, аттракторы возникающие в системе 3-го порядка с разрывной правой частью, когда поверхность переключения определяется двумя вложенными функциями насыщения типа sat. Приведены численные примеры, иллюстрирующие корректность полученных результатов. Указаны отличия скрытых аттракторов от скрытых колебаний, возникающих в аналогичной системе с разрывной правой частью, но имеющей более простую структуру.

*Ключевые слова:* разрывная правая часть, скрытые колебания, скрытые аттракторы, неустойчивый цикл

## 1. Введение

Рассмотрим нелинейную систему 3-го порядка  $x = [x_1, x_2, x_3]^T \in R^3$  с разрывной правой частью вида

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -\text{sign} \left( x_3 + \text{sat} \left( n\alpha \left( x_2 + \text{sat} \left( \frac{\alpha}{n} x_1 \right) \right) \right) \right),$$

где функция  $\text{sign}(x) = x/|x|$ ,  $x \neq 0$  и  $\text{sign}(x) \in [-1, 1]$  многозначная функция при  $x = 0$ , а решение системы (1) понимается в смысле Филлипса [1];  $\text{sat} = x$  при  $|x| \leq 1$  и  $\text{sign}(x)$  при  $|x| > 1$ .

Пусть параметры  $\alpha, n$  системы (1) удовлетворяют неравенствам

$$(2) \quad 0 < \alpha, \quad 0 < n,$$

тогда из численного моделирования следует, что в системе при разных значениях параметров  $\alpha, n$  могут возникать, скрытые колебания, скрытые аттракторы и неустойчивые циклы.

**Определение 1.** [2] Аттрактор называется скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся.

**Определение 2.** Устойчивый, полуустойчивый или частично устойчивый цикл называется скрытым (скрытое колебание), если он и область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия.

Отличие в определениях заключается в том, что скрытое колебание состоит из одной траектории, тогда как скрытый аттрактор представляет собой множество, которое, вообще говоря, может состоять из бесконечного числа траекторий системы.

**Задача 1.** Необходимо для набора параметров  $n, \alpha$  из множества (2) указать значения, при которых в системе (1) существуют колебания, а также провести их классификацию.

## 2. Основной результат

Для системы (1) метод поиска скрытых колебаний, предложенный в [2], не применим, т.к. система не сводится к системе Лурье, а общий метод поиска циклов описанный в для негладких систем приводит к нелинейным алгебраическим системам. Поэтому для поиска циклов будем использовать алгоритм, предложенный в [3].

Пусть цикл удовлетворяет предположениям [4] (i) цикл — гладкая кривая на плоскости  $(x_1, x_2)$ ; (ii) цикл — симметричен относительно

поверхности переключения; (iii) полуцикл — состоит только из одного сегмента; (iv) цикл целиком лежит в слое в фазовом пространстве  $\Pi_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_3| < 1\}$ , тогда справедливо утверждение

**Лемма 1.** Пусть параметры  $\alpha, n$  удовлетворяют условию,  $\sqrt{3} < \alpha$ , тогда в системе (1) есть неустойчивый цикл с параметрами  $x_1^0 = -\frac{\sqrt{3}}{\alpha}$ ,  $x_2^0 = 0$ ,  $x_3^0 = \frac{\sqrt{3}}{\alpha}$ ;  $\Theta = 2x_3^0$ , траектория которого состоит из 2-х симметричных относительно нуля сегментов кривых при  $\theta \in [0, \Theta]$   $x_3(\theta) = -\theta + x_3^0$ ,  $x_2(\theta) = -\frac{\theta^2}{2} + x_3^0\theta + x_2^0$ ,  $x_1(\theta) = -\frac{\theta^3}{6} + x_3^0\frac{\theta^2}{2} + x_2^0\theta + x_1^0$ .

**Утверждение 1.** Возникновение неустойчивого цикла в системе вида (1) не зависит от типа монотонной функции, реализующей ограничение переменной  $x_1$  внутри функции sat.

Для отыскания другого типа циклов сделаем другие предположения, связанные со структурой поверхности разрыва, на которой возможен устойчивый скользящий режим. Полуцикл будем искать как 2-сегментную кривую с гладкой проекцией на плоскость  $(x_1, x_2)$ , удовлетворяющую условиям [4]: (v) на первом сегменте  $\dot{x}_3 = -1$  и  $x_3^0 = 1$ ; (vi) на втором сегменте  $\dot{x}_3 = 0$  и  $x_3(\Theta) = -1$ , где  $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$  — полупериод.

**Теорема 1.** Пусть значения параметров  $\alpha, n$  удовлетворяют условиям  $\sqrt{3} \leq \alpha < 3/4(n^2 + 1)/n$ ,  $\sqrt{3} < n$ , тогда в системе (1) есть частично-устойчивое скрытое колебание с параметрами  $x_1^0 = \frac{3-n\alpha}{3\alpha(n-\alpha)}$ ,  $x_2^0 = \frac{\alpha^2-3}{3\alpha(n-\alpha)}$ ,  $x_3^0 = 1$ . Оно состоит из 2-х сегментов: первый сегмент  $x_3^1(\theta_1) = -\theta_1 + 1$ ,  $x_2^1(\theta_1) = -\frac{\theta_1^2}{2} + \theta_1 + x_2^0$ ,  $x_1^1(\theta_1) = -\frac{\theta_1^3}{6} + \frac{\theta_1^2}{2} + x_2^0\theta_1 + x_1^0$ , где  $\theta_1 \in [0, \Theta_1]$ ,  $\Theta_1 = 2$ ; второй сегмент  $x_3^2(\theta_2) = -1$ ,  $x_2^2(\theta_2) = -\theta_2 + x_2^1(\Theta_1)$ ,  $x_1^2 = -\frac{\theta_2^2}{2} + x_2^1(\Theta_1)\theta_2 + x_1^1(\Theta_1)$ , где  $\theta_2 \in [0, \Theta_2]$ ,  $\Theta_2 = 2x_2^0$ .

Если значения параметров  $\alpha, n$  удовлетворяют условиям  $3/4(n^2 + 1)/n \leq \alpha$ ,  $1/\sqrt{3} < n$  в системе образуется скрытый аттрактор в виде частично-устойчивого цилиндра, с центральным циклом, который описывается теми же сегментами  $x_i^j(\theta_j)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , но определяется параметрами  $x_1^0 = -(4/3 - 1/n\alpha)$ ,  $x_2^0 = (1 - 1/n\alpha)$ ,  $x_3^0 = 1$ . При этом высота цилиндра  $\Delta = [-4/3 + n/\alpha, 4/3 - n/\alpha]$ , а его образующие параллельны оси  $x_1$  в фазовом пространстве.

### Список литературы

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

2. *Leonov, G. A., Kuznetsov, N. V.* Hidden Oscillations in Dynamical Systems. 16 Hilbert's Problem, Aizerman's and Kalman's Conjectures, Hidden Attractors in Chua's Circuits // Journal of Mathematical Sciences. 2014. V. 201. P. 645–662.
3. *Фейгин М.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
4. *Морозов Ю.В.* Скрытые колебания в задаче управления интегратором 3-го порядка при использовании непрерывного управления и разрывного // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2025. № 2. С. 1–29.

### **Analysis of Cycles in a 3rd Order System With a Discontinuous Right-Hand Side and Two Nested Saturators.**

*Yu. V. Morozov*

Institute of Control Sciences, Moscow, Russia  
tot1983@ipu.ru

The paper analytically identifies hidden attractors arising in a third-order system with a discontinuous right-hand side, where the switching surface is defined by two nested sat-type saturation functions. Numerical examples illustrating the validity of the results are provided. Differences between these hidden attractors and hidden oscillations occurring in a similar discontinuous system with a simpler structure are highlighted.

---

## Особенности управления движением малых спутников в околоземных и межпланетных миссиях

*М.Ю. Овчинников*

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
ovchinni@keldysh.ru

В докладе дается исторический экскурс появления и развития малых аппаратов с упором на эволюцию методов и подходов, применяемых для обеспечения углового и поступательного (орбитального) движения как околоземных одиночных, так и аппаратов, движущихся в группе, включая аппараты, предназначенные для межпланетных миссий. Рассматриваются особенности управления движением малых космических аппаратов с учетом ограниченности ресурса управления на всех этапах их развития.

*Ключевые слова:* малый космический аппарат, управление угловым и орбитальным движением, исторический экскурс

Появление малых спутников повлекло, если не коренное, то принципиальное изменение в подходах к управлению движением космических аппаратов — то, что было традиционно применимо к большим аппаратам, становится плохо применимым или совсем неприменимым для малых, и наоборот — малые аппараты могут себе позволить управляться не так, как большие. А из-за того, что фантазий и смелости разработчикам малых космических аппаратов (МКА) не занимать при конструировании миссий, то приходится применять весь арсенал возможностей, порой даже для непосвященного специалиста, экзотических.

С 60-х годов запускались небольшие радиолюбительские, студенческие, научные и технологические спутники. Что же произошло в 90-х годах? Эволюционные изменения — это прогресс в электронике и материаловедении, позволившие миниатюризировать бортовую электронику и компьютеры, средства связи. Перестройка привела к куда более резким изменениям — проникновению на рынок недорогих конверсионных носителей, переделанных из боевых ракет, возможность попутного запуска на больших ракетах стимулировали снижение массы аппаратов. Резкое сокращение финансирования космической отрасли потребовало снижение затрат на разработку, испытания и изготовление спутников. Снизилась востребованность отраслью в прежнем объеме

молодых кадров. Все это слилось воедино и потребовалось решение. Появилась странная и противоречивая, на первый взгляд, парадигма — Cheaper, Faster, Better. Но оказалось, что можно минимизировать функционал, составленный как сумма этих критериев, тогда задача имеет смысл. Главное, малые спутники — это уже отдельный класс космических аппаратов со своими особенностями. Не просто малые по размерам и массе аппараты, что является относительным, а новые изделия, разрабатываемые по своим особым правилам — это экономичные спутники, в разработке и управлении которыми используются нетрадиционные, зачастую рискованные подходы, направленные на обеспечение определенной ценности для заказчика при низких затратах и в кратчайшие сроки организации миссии. Илон Маск пошел этим путем. Он использует фактически элементную базу смартфонов, что привело при их массовом производстве к резкому удешевлению спутников. Быстрый выход их из строя привел к необходимости запуска большого количества МКА и, как следствие, к потребности в тяжелой ракете. Отсюда появилась экономическая целесообразность создания многоразовой ракеты.

Проследим историю становления и развития малых спутников. 1990–2000 гг. — это время отдельных экспериментальных, нащупывающих свое место в мире космоса аппаратов. Разработчики самостоятельно изготавливают компоненты спутников, адаптируют их из других областей — происходит масштабирование больших аппаратов. Ориентация обеспечивается пассивными методами, об управлении орбитальным движением речи пока не идет. Девиз миссий — «А вдруг получится!». На этом этапе появилась условная, но полезная градация МКА, введенная *Arganospace*

наименование	mini	small	micro	nano	pico
масса, кг	1000-500	500-100	100-10	10-1	1-0

Появление кубсатов (*Cubesat*) в 1999 году радикально изменило космическую индустрию, сделав доступ к космосу дешевым для университетов и небольших компаний. Кубсаты внесли свою лепту в классификацию, исходя из единицы измерения — 1U (размером 10x10x10 см и массой около 1 кг). Идеология конструкции кубсатов, когда каждый юнит является подсистемой со стандартным интерфейсом, привела к возможности создавать МКА, собирая их как домики из кубиков. Это породило иную классификацию малых аппаратов, скомпонованных из отдельных юнитов, — 1U, 3U, 6U, 12U, 16U, 24U, 27U.

Следующая декада 2000–2010 гг. характеризуется появлением рынка комплектующих и даже поставщиков спутников «под заказ». Формируется рынок услуг по их выводу на орбиту. Стали внедряться более точные активные магнитные и маховичные системы ориентации. Появилась коммерческая полезная нагрузка в виде камер и телескопов. Девиз поменялся на более оптимистичный — «У нас получилось!».

Декада 2010–2020 гг. знаменуется использованием пассивных методов баллистики и появлением миниатюрных двигателей, позволяющих обеспечить маневрирование и удержание аппаратов на орбите. Это привело к реализации многоспутниковых систем типа Constellation, когда аппараты разводятся по орбите, образуя сети для решения задач навигации, связи, дистанционного зондирования Земли с индивидуальным управлением и типа Formation Flying, когда аппараты летят в непосредственной близости друг от друга, решая совместную задачу по принципу распределенной системы, обычно с централизованным управлением. Те и другие требуют управления относительно простым положением, ибо гравитационное поле Земли быстро разрушает изначально выстроенную конфигурацию. Движители, как активные на реактивных двигателях, так и использующие эффекты сопротивления атмосферы, позволяют поддерживать заданные пространственные конфигурации. Возникают интересные динамические задачи по управлению относительно простым движением. Появляются рои (Swarm), где каждый аппарат управляется самостоятельно.

В текущей декаде 2020–2030 гг. появляются сложные с точки зрения баллистики миссии — одиночные к Луне, астероидам, другим планетам Солнечной системы на базе МКА. Потребовалось внедрения изоциральных математических методов, позволяющих с использованием маломощных двигателей, не способных конкурировать по создаваемому ускорению с ускорениями от небесных тел и Солнца, решать поставленные задачи. Подавляющее большинство запущенных межпланетных МКА предназначены для исследования астероидов. Астероиды обладают малой массой и поэтому не требуют торможения при сближении с ними. Межпланетный же перелет требует выхода на границу грависферы планеты-цели с отрицательной кеплеровой энергией для обеспечения баллистического захвата аппарата ее гравитационным полем. Далее, требуется весьма кропотливое снижение орбиты в поле притяжения. Для перелета к Луне можно использовать обходную траекторию — сильно вытянутую в сторону Солнца (или в противоположную сторону от Солнца) орбиту с апогеем высотой около полутора миллионов км. Слабое, но постоянно действующее притяжение Солнца

способно изменить наклонение орбиты, поднять ее перигей до орбиты Луны, развести аппараты по долготе восходящего угла окололунных орбит при их одновременном запуске. Гибридная схема доставки МКА к Луне и планетам земной группы — попутный вывод МКА на околоземную орбиту с основным аппаратом, отлет на межпланетную орбиту на резерве топлива разгонного блока и дальнейший полет с электро-реактивным двигателем — позволит дешевле и чаще реализовывать межпланетные миссии.

Ожидается, что в 2030–2040 гг. наступит освоение межпланетного пространства и Луны группировками МКА. Для освоения Луны как первой цели инопланетной экспансии потребуются системы глобальной навигации, связи, наблюдения, поэтому появление группировок неизбежно. Использование МКА для исследования Венеры и Марса позволит наряду с проведением исследований по традиционным научным направлениям выполнить высокорискованные миссии с критически низкими перигентрами, либо требующие быстрого цикла разработка-перелет. Будут сделаны попытки выхода в межзвездное пространство по типу полета в фокус гравитационной линзы Солнца, начинающегося на расстоянии 547 а.е. и простирающегося до 1000 а.е.

Интенсивное использование МКА нашими ближайшими коллегами-конкурентами на мировой арене, решительные шаги в активизации этого направления Минобрнауки, Роскосмосом, инициативы фондов дают надежду, что и в России это будет успешно развиваться.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (Проект № 24-11-00038), <https://rscf.ru/project/24-11-00038/>.

## **Features of Motion Control of Small Satellites in Near-Earth and Interplanetary Missions**

*M. Yu. Ovchinnikov*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russia  
ovchinni@keldysh.ru

The paper presents historical aspects of the generation and development of small spacecraft focusing on the evolution of methods and approaches used to construct angular and translational (orbital) motion for both single near-Earth spacecraft and spacecraft moving in groups including spacecraft designed for interplanetary missions. It examines the specifics of small spacecraft motion control taking into account the limited control resources at all stages of their evolution.

## **Алгебраический метод исследования робастности дискретных интервальных динамических систем**

*Р. О. Оморов*

Институт машиноведения, автоматике и геомеханики Национальной академии наук Кыргызской Республики, г. Бишкек, Кыргызская Республика  
omorovromano@gmail.com

В работе приведены основные результаты рассматриваемого алгебраического метода для линейных интервальных систем в дискретном времени. Получен дискретный аналог теоремы Харитоновва. Сформулирован алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем.

*Ключевые слова:* интервальная динамическая система, алгебраическое направление робастной устойчивости, угловые полиномы Харитоновва, интервальная матрица, сепаратные угловые коэффициенты, дискретный аналог теоремы Харитоновва, точка и интервал перемежаемости

### **1. Введение**

В развитии современной теории управления наблюдается повышенный интерес к проблемам робастности и грубости систем [1,2]. Тот интерес, к которому привлекают проблемы робастности и грубости в различных областях науки и техники, да и не только в теории управления, но и в экологии, синергетике и т.д., связан с тем, что эти понятия относятся к важнейшим свойствам систем, рассматриваемых при их реальном функционировании.

Что касается непосредственно систем управления, то в настоящее время наиболее рассмотрены и решены вопросы робастной устойчивости. Решение этих вопросов прежде всего связано с основополагающими результатами В.Л. Харитоновва, в которых решены вопросы робастной устойчивости для интервальных полиномов [3].

В современной теории интервальных динамических систем существуют два альтернативных направления [1-4]: алгебраическое или Харитоновское направление и частотное или направление Цыпкина–

Поляка.

В настоящей работе рассматривается алгебраический метод исследования робастности дискретных интервальных динамических систем, основы которой заложены в работе [5].

## 2. Постановка задачи

Рассматривается линейная дискретная динамическая система порядка  $n$

$$(1) \quad x(m+1) = Ax(m) \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $x(m)$  — вектор состояния,  $A \in R^{n \times n}$  — интервальная матрица с элементами  $a_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , представляющими интервальные величины  $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ , с угловыми значениями  $\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}$ ,  $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$ . Требуется определить условия робастной устойчивости системы (1).

## 3. Основные результаты

Как известно, публикация работы [3] дала импульс для поиска многими исследователями дискретных аналогов теорем Харитоновой [1,2,5,6]. Так в работе [1] указано, что аналоги «слабой» и «сильной» теорем Харитоновой имеют определенные ограничения, накладываемые на интервальные области коэффициентов. Эти ограничения были сняты в работах [5,6], где получены аналоги теорем Харитоновой с использованием теоремы Шура. Далее, рассматривается обобщение результатов, полученных в работе [5], с учетом уточняющих выводов для непрерывных систем [4]. Для дискретных систем, используя  $z$ -преобразование, получаем интервальный характеристический полином

$$(2) \quad f(z) = \det(zI - A) = \sum_{i=1}^n b_i z^{n-i}, \quad b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \quad \underline{b}_i \leq \overline{b}_i.$$

Для определения условий устойчивости воспользуемся теоремой Шура, т.е. условиями вида  $|b_0| > |b_n|$  для последовательности полиномов, определяемых рекуррентными соотношениями

$$f_i(z) = \frac{[b_0 f(z) - b_n f(\frac{1}{z}) z^n]}{z}, \dots, f_{i+1}(z) = \frac{[b_{0,i} f_i(z) - b_{n,i} f_i(\frac{1}{z}) z^{n-1}]}{z},$$

где  $b_{0,i}, b_{n,i}$  — соответственно старший и младший коэффициенты  $i$ -го ( $i = \overline{1, n-2}$ ) полинома  $f_i(z)$ .

**Определение 1.** Точками перемежаемости для коэффициентов  $b_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  будем называть точки на действительной оси, в которых происходят переходы корней полинома (2) через единичную окружность на плоскости корней, а интервалами перемежаемости — соответственно интервалы, в которых корни находятся либо внутри, либо вне единичного круга.

В работе [5] сформулированы основные результаты по определению условий робастной устойчивости дискретных интервальных систем в виде соответствующих теорем 1-6. При этом следует отметить, что, как указано выше, для случая непрерывных систем [4], справедливость теоремы 5 имеет ограничение, обусловленное замечанием к теореме 1 в непрерывном случае, т.е. теорема 5 верна при полном наборе из 4-х различных полиномов Харитонова.

Справедливость результатов [4,5] относительно аналога сильной теоремы Харитонова продемонстрированы на известных контрпримерах из [1] и др.

Таким образом, алгоритм определения робастной устойчивости дискретных интервальных динамических систем будет следующим.

1. Пользуясь формулами леммы к теореме 1 [4], оптимизацией по элементам  $a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , интервальной матрицы  $A$ , находятся сепаратные угловые коэффициенты  $b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , интервального характеристического полинома (2).

2. Определяются четыре полинома Харитонова, соответствующие интервальному полиному (2)

$$\begin{aligned} f_1(z) &: \{b_0, \underline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4, \dots, \}; & f_2(z) &: \{\underline{b}_0, \overline{b}_1, \overline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \dots, \}; \\ f_3(z) &: \{\overline{b}_0, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \overline{b}_3, \underline{b}_4, \dots, \}; & f_4(z) &: \{\overline{b}_0, \overline{b}_1, \underline{b}_2, \overline{b}_3, \overline{b}_4, \dots, \}. \end{aligned}$$

3. Составляются  $n$  неравенств вида (П.2), указанных в Приложении непрерывного случая [4].

4. Относительно каждого коэффициента  $b_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , считая остальные коэффициенты фиксированными, последовательно находятся точки перемежаемости для всех четырех полиномов Харитонова и по всем  $n$  неравенствам (см. п. 3), начиная с меньших порядков.

5. Если все точки перемежаемости по всем коэффициентам  $b_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  не принадлежат заданным интервалам, то исходный полином (система) устойчив, в противном случае — неустойчив.

#### Список литературы

1. Джурри Э.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С.4-28.

2. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. 1991. Т. 32. С. 3–31.
3. *Харитонов В.Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
4. *Оморов Р.О.* Робастная устойчивость интервальных динамических систем. Бишкек: Илим, 2018.
5. *Оморов Р.О.* Робастность интервальных динамических систем. II. Робастность дискретных линейных интервальных динамических систем // Теория и системы управления. 1995. № 3. С. 3–7.
6. *Оморов Р.О.* О дискретном аналоге теоремы Харитонова // Наука и новые технологии. 2002. № 3. С. 5–10.

## **Algebraic Method of the Research Robustness of Discrete Interval Dynamic Systems**

*R. O. Omorov*

Institute of Mechanical Science, Automation and Geomechanics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyz Republic  
omorovromano@gmail.com

This paper presents the main results of the algebraic method under consideration for linear interval systems in discrete time. A discrete analog of Kharitonov's theorem is obtained. An algorithm for determining the robust stability of discrete interval dynamic systems is formulated.

---

**Задача Дубинса со штрафом на затраты управления***Н. А. Орёл<sup>1</sup>, О. Ю. Черкасов<sup>2</sup>*МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия<sup>1</sup>Университет МГУ-ППИ, Шэньчжэнь, Китай<sup>2</sup>

nikita.orel@math.msu.ru, oyuche@yandex.ru

Рассматривается задача максимизации дальности с ограничением на расход топлива. В качестве математической модели движения используется модификация задачи Дубинса, в которой управлением является реактивная сила, ортогональная траектории. С использованием принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений типа нелинейного математического маятника. С помощью анализа фазового портрета установлена структура оптимальной траектории, в частности, магистральное движение при больших временах процесса. С использованием первого интеграла определено количество выходов на ограничение. Аналитически построен синтез оптимального управления. Численное моделирование иллюстрирует результаты, полученные аналитически.

*Ключевые слова:* задача Маркова-Дубинса, оптимальное управление, фазовый портрет, первый интеграл

**1. Постановка задачи**

Рассмотрим движение центра масс аппарата в горизонтальной плоскости. Считаем, что сопротивление среды отсутствует, а скорость аппарата постоянная. В качестве модели движения возьмем систему уравнений Маркова-Дубинса [1], в которой движение в плоскости реализуется за счет реактивной силы, компенсирующей силу тяжести, и силы, ортогональной траектории. Уравнения движения в безразмерном виде:

$$(1) \quad \dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta, \quad \dot{\theta} = u,$$

где  $x, y$  — горизонтальная и вертикальная координаты центра масс аппарата,  $\theta$  — угол между вектором скорости и направлением оси абсцисс,  $u$  — сила тяги. Начальные и краевые условия:

$$(2) \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad y(T) = y_1, \quad \theta(T) = \theta_1.$$

Ограничения на управление  $u$  имеют вид  $-\bar{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$ . Целью управления является минимизация функционала вида

$$(3) \quad \begin{aligned} J_1 &= -x(T) + k \int_0^T \sqrt{1 + u^2} dt \rightarrow \min_{|u| \leq \bar{u}}, \\ J_2 &= -x(T) + k \int_0^T u^2 dt \rightarrow \min_{|u| \leq \bar{u}} \end{aligned}$$

Здесь  $k > 0$  — заданная константа. Время процесса  $T$  фиксировано. В докладе будет рассмотрен функционал  $J_2$ .

## 2. Условия оптимальности

Для решения поставленной задачи оптимального управления применим принцип максимума Понтрягина. Пусть  $\xi(t) = \int_0^t u^2(\tau) d\tau$ , тогда  $\dot{\xi} = u^2$ ,  $\xi(0) = 0$ . К системе уравнений (1) добавим еще одно дифференциальное уравнение, получим

$$(4) \quad \dot{x} = \cos \theta, \quad \dot{y} = \sin \theta, \quad \dot{\theta} = u, \quad \dot{\xi} = u^2.$$

Функцию Гамильтона запишем в виде

$$(5) \quad H = \psi_x \cos \theta + \psi_y \sin \theta + \psi_\theta u + \psi_\xi u^2.$$

Далее, уравнения для сопряженных переменных:

$$(6) \quad \dot{\psi}_x = 0, \quad \dot{\psi}_y = 0, \quad \dot{\psi}_\theta = \psi_x \sin \theta - \psi_y \cos \theta, \quad \dot{\psi}_\xi = 0.$$

Условия трансверсальности:

$$(7) \quad \psi_x(T) = 1, \quad \psi_y(T) = a, \quad \psi_\theta(T) = b, \quad \psi_\xi(T) = -k,$$

где  $a$  и  $b$  — неизвестные константы. Из соотношений (6), (7) получаем, что  $\psi_x(t) = 1$ ,  $\psi_y(t) = a$ ,  $\psi_\xi(t) = -k$ . Тогда функция Гамильтона (5) переписывается как

$$(8) \quad H = \cos \theta + a \sin \theta + \psi_\theta u - k u^2.$$

Условия оптимальности по управлению  $u$ :

$$(9) \quad u = \begin{cases} \bar{u}, & u_{\text{extr}} \geq \bar{u}, \\ u_{\text{extr}}, & -\bar{u} < u_{\text{extr}} < \bar{u}, \\ -\bar{u}, & u_{\text{extr}} \leq -\bar{u}, \end{cases}$$

где  $u_{\text{extr}}$  определяется из уравнения  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \iff u_{\text{extr}} = \frac{\psi_\theta}{2k}$ .

Далее, получим дифференциальное уравнение относительно управляющей переменной  $u$ , где  $-\bar{u} < u(t) < \bar{u}$ . Подставим выражение  $\psi_\theta = 2ku$  в дифференциальное уравнение относительно  $\psi_\theta$ :

$$\frac{d}{dt}(2ku) = \sin \theta - a \cos \theta \iff \dot{u} = \frac{\sin \theta - a \cos \theta}{2k}.$$

Таким образом, задача оптимального управления (1)-(3) сведена к краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos \theta, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = \sin \theta, & y(0) = y_0, & y(T) = y_1, \\ \dot{\theta} = u, & \theta(0) = \theta_0, & \theta(T) = \theta_1, \\ \dot{\psi}_\theta = \sin \theta - a \cos \theta, & \psi_\theta(T) = b. \end{cases}$$

Задача состоит в нахождении такого  $\psi_\theta(0)$ , при котором  $\psi_\theta(T) = b$ . Управление  $u(t)$  определяется по следующему правилу:

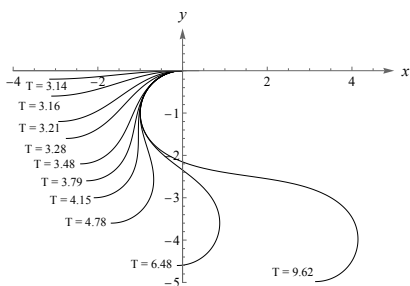
$$(11) \quad u(t) = \begin{cases} \bar{u}, & \frac{\psi_\theta}{2k} \geq \bar{u}, \\ \frac{\psi_\theta}{2k}, & -\bar{u} < \frac{\psi_\theta}{2k} < \bar{u}, \\ -\bar{u}, & \frac{\psi_\theta}{2k} \leq -\bar{u}, \end{cases}$$

Выражение для первого интеграла (8):

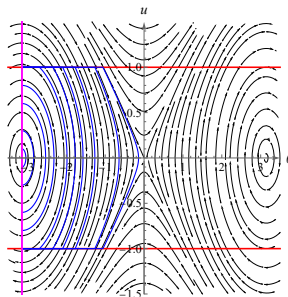
$$(12) \quad H = \cos \theta + a \sin \theta + ku^2 = C.$$

### 3. Результаты

С использованием первого интеграла (12) было установлено число переключений управления  $u$  вдоль оптимальной траектории (не более двух). При достаточно больших временах процесса  $T$  движение происходит в окрестности седловой точки в плоскости  $(\theta, u)$ , что соответствует магистральному движению (квазипрямолинейный участок оптимальной траектории). Установлена структура оптимального управления. Результаты получены для случая свободного  $y(T)$ , но фиксированного  $\theta(T)$ . Фазовый портрет позволяет получить решение без учета неизвестного параметра  $b$ . При  $k \rightarrow 0 + 0$  оптимальные траектории задачи (1)-(3) приближаются к траекториям классической задачи Дубинса (движение по окружностям, движение по прямой).



а) Траектории в плоскости  $(x, y)$



б) Траектории в плоскости  $(\theta, u)$

Рис. 1: Результаты численного моделирования при  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $\theta(0) = -\pi$ ,  $\theta(T) = -\pi$ ,  $k = 1$ ,  $\bar{u} = 1$

### Список литературы

1. *Sussman H.J.* The Markov-Dubins Problem with Angular Acceleration Control // Proc. 36th IEEE Conf. on Decision and Control. San Diego, 1997. P. 2639–2643.

### The Dubins Problem with Penalty on Control Costs

*N. A. Oryol<sup>1</sup>, O. Yu. Cherkasov<sup>2</sup>*

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia<sup>1</sup>,  
MSU–BIT University, Shenzhen, China<sup>2</sup>

nikita.orel@math.msu.ru, oyuche@yandex.ru

The problem of maximizing the range with a limit on fuel consumption is considered. A modification of the Dubins problem is used as a mathematical model of motion, in which the control is a reactive force orthogonal to the trajectory. Using the Pontryagin maximum principle, the optimal control problem is reduced to a boundary value problem for a system of nonlinear differential equations (a nonlinear mathematical pendulum type). Analysis of phase portrait is applied, the structure of the optimal trajectories was established, in particular, the mainline motion at long process times. Using the first integral, the number of exits per constraints is determined. The synthesis of optimal control is analytically constructed. Numerical simulation illustrates the analytical results obtained.

## Регулирование температуры помещения в условиях параметрической неопределенности и неполных измерений

Ю. В. Орлов, Ю. М. Рассадин

ИПУ РАН, Москва, Россия  
yorlov@ipu.ru, rassadin@ipu.ru

Рассмотрена усовершенствованная модель динамики температуры воздуха, включающая среднюю температуру окружающих поверхностей. Соответствующий коэффициент теплопередачи полагается неизвестным. На основе измерений температуры воздуха предлагается наблюдатель средней температуры излучения в скользящем режиме и адаптивный идентификатор параметров.

*Ключевые слова:* регулирование температуры, средняя радиационная температура, наблюдатель состояния, идентификатор параметров

### 1. Введение

В работе рассматривается расширенное пространство состояний объекта, включающее среднюю радиационную температуру (СРТ) [3]. Учет динамики СРТ, которая определяется температурой ограждающих поверхностей, позволяет точнее описывать теплообмен и инерционность конструкций, а разница с температурой воздуха влияет на комфорт и здоровье людей. Хотя СРТ доступна для прямого измерения [2], эти замеры — разовые и контрольные, что исключает их использование в контуре обратной связи.

Для обеспечения непрерывных измерений СРТ и последующего использования их в синтезе управления предлагается алгоритм идентификации на скользящих режимах [4], который позволяет не только получать оценки для СРТ, но и адаптивно уточнять параметры модели в реальном времени, повышая точность прогнозов и энергоэффективность систем отопления, вентиляции и кондиционирования.

### 2. Основной результат

Динамика температуры в помещении описывается уравнениями в безразмерном виде:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + u \\ \dot{x}_2 &= -b(x_2 - x_1), \end{aligned}$$

где  $x_1(t)$  — температура воздуха,  $x_2(t)$  — средняя радиационная температура,  $a, b$  — параметры, определяемые коэффициентами теплопередачи. Кроме того, не теряя общности рассуждений, предположим, что закон управления уже выбран, т.е. известен общий вид некоторой функции  $u = u(t)$ .

Введем замену переменных  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = a(x_2 - x_1)$ . В нашем случае измерению подлежит не весь вектор состояния, а только переменная  $y_1$ . Тогда получить оценку значения  $y_2$  можно с помощью наблюдателя, который в терминах ошибок наблюдения описывается системой уравнений вида

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - v_1 \\ \dot{e}_2 &= -ce_2 - v_2, \end{aligned}$$

где  $v_1, v_2$  — корректирующие воздействия,  $e_1$  доступно для измерений, а коэффициент  $c = a + b$ . Если назначить  $v_1 = M \text{sign}(e_1)$ , то в предположении, что  $|e_2(t)| < M \forall t$ , выполняются условия возникновения скользящего режима по поверхности  $e_1 = 0$ . Согласно методу эквивалентного управления [4] динамика возникающего скользящего режима на поверхности  $e_1 = 0$  получается подстановкой  $v_{1,eq} = e_2$  во второе уравнение (2), исходя из соображения, что в скользящем режиме  $\dot{e}_1 = 0$  и следовательно,  $v_1 = v_{1,eq} = e_2$  вдоль поверхности скольжения.

### 3. Параметрическая идентификация по полному вектору измерений

Когда также неизвестны точные значения параметров  $a, c$ , предлагается использовать наблюдатель на скользящих режимах, который при полных измерениях всего вектора состояния задается дифференциальным уравнением

$$(3) \quad \dot{\tilde{y}}_2 = -\tilde{c}y_2 - \tilde{a}u + \alpha(y_2 - \tilde{y}_2)$$

на оценку  $\tilde{y}_2$  переменной состояния  $y_2$  с подстраиваемыми в реальном времени оценками  $\tilde{a}(t), \tilde{c}(t)$  параметров  $a, c$ .

Введем ошибку оценивания  $e_2 = y_2 - \tilde{y}_2$ . Перепишем систему (3) в терминах ошибок наблюдения

$$(4) \quad \dot{e}_2 = -e_c y_2 - e_a u - \alpha e_2$$

где  $e_a = a - \tilde{a}$ ,  $e_c = c - \tilde{c}$  — ошибки оценивания параметров.

Очевидно, выбор коэффициента усиления  $\alpha$  достаточно большим увеличивает скорость затухания собственной динамики ошибки оценивания фазовой переменной  $y_2(t)$ .

Остается назначить динамику оценок неизвестных параметров, которые позволят гарантировать асимптотическую устойчивость замкнутой системы совместного оценивания неизвестных параметров системы  $a, c$ . С этой целью, на оценки  $\tilde{a}, \tilde{c}$  предлагается ввести следующую динамику

$$(5) \quad \dot{\tilde{a}} = -e_2 u, \quad \dot{\tilde{c}} = -e_2 y_2.$$

Для использования  $v_{1,eq}$  на практике его значение можно оценить различными способами. В [4] эквивалентное управление объясняется физически, как среднее значение управления, и для его измерения предлагается использовать линейный фильтр.

#### Список литературы

1. *Гамазин С.И., Кудрин Б.И., Цырука С.А.* Справочник по энергоснабжению и электрооборудованию промышленных предприятий и общественных зданий. М.: Издательский дом МЭИ, 2010.
2. *Антонов Л.П., Затучный А.И.* Определение радиационной температуры в закрытых помещениях // Гигиена и санитария. 1939. № 6.
3. *Ryzhov A., Ouerdane H., Gryazina E., Bischi A., Turitsyn K.* Model Predictive Control of Indoor Microclimate: Existing Building Stock Comfort Improvement // Energy Conversion and Management. 2019. V. 179. P. 219-22
4. *Уткин В.И.* Принципы идентификации на скользящих режимах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 3. С. 558-561

### Air Temperature Control under Parametric Uncertainty and Incomplete Measurements

*Y. V. Orlov, Y. M. Rassadin*

Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Russia  
yorlov@ipu.ru, rassadin@ipu.ru

An improved model of air temperature dynamics, including the mean radiant temperature is considered. The corresponding heat transfer coefficient is assumed to be unknown. Based on air temperature measurements, an observer of the mean radiant temperature in a sliding mode and an adaptive parameter identifier are proposed.

---

## О равновесии и устойчивости вращающихся капель в электростатическом поле

*А. Г. Петров*

ИПМех РАН им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия  
petrovipmech@gmail.com

Рассматриваются задача определения фигуры равновесия вращающейся жидкой массы с поверхностным натяжением в электростатическом поле. Методом Рауса исключается циклическая угловая координата, и задача равновесия и устойчивости сводится к условию минимума функционала, зависящего от параметров формы. Предлагается ее решение методом Ритца: минимум функционала ищется на семействе трехосных эллипсоидов. Точность решений используемого подхода проверена на двух известных задачах: 1) фигуры равновесия и устойчивости вращающейся гравитирующей массы, 2) формы равновесия вращающейся жидкой капли с поверхностным натяжением. Приведенный подход в первой задаче дает точное решение. Во второй задаче — сопоставление с численными расчетами нобелевского лауреата Чандрасекхара показало согласие с точностью до 3-х значащих цифр.

*Ключевые слова:* вращающиеся капли, поверхностное натяжение, электрическое поле, метод Рауса, метод Ритца

### 1. Введение

В работе [1] приведен подробный обзор исследований равновесных форм капель и условий их устойчивости в электрических полях.

Формы равновесия и устойчивости вращающейся капли исследовал нобелевский лауреат Чандрасекхар разработанным им методом вириала [2]. В [3] приводится полуэмпирическая степенная функция, аппроксимирующая условие устойчивости равновесия капли в электрическом поле и проведен физический эксперимент, подтверждающий полученные теоретические результаты. В [4] исследуется электрогидродинамика капель диэлектрика в ньютоновской жидкости под воздействием гравитационного и электрического поля. В [5] исследуется форма равновесия вращающейся капли в электростатическом поле из условия минимума энергии на семействе осесимметричных эллипсоидов.

### 2. Основной результат

Задача определения равновесных форм вращающихся жидких масс и их устойчивости с использованием метод Рауса сведена к находке-

нию минимума функционала, зависящего от формы капли

$$U = \Pi + \frac{K^2}{2J},$$

где  $K$  — постоянный кинетический момент,  $J$  — момент инерции.

Потенциальная энергия капли  $\Pi = \sigma S + \Pi_1 + \Pi_2$  является суммой трех слагаемых. Первое слагаемое — энергия поверхностного натяжения,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $S$  — площадь поверхности капли.  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — потенциальные энергии заряженной капли с зарядом  $e$  и нейтральной капли в электростатическом поле напряженности  $E$ .

Для поиска минимума функционала применяется метод Ритца: поиск минимума на заданном семействе форм.

В качестве заданного семейства выбирается семейство трехосных эллипсоидов фиксированного объема. Тогда функционал  $U$  превращается в функцию двух переменных. Показано на некоторых примерах, которые решены ранее численными методами, что такой способ позволяет получать либо точные, либо близкие к точным решения.

Для определения равновесных форм записываем функцию

$$U(a_1, a_2, a_3)$$

в безразмерной форме

$$\tilde{U}(x, y, \alpha, \beta) = \tilde{\Pi}(x, y, \alpha, \beta) + \frac{(J_0 \tilde{\Omega})^2}{2\tilde{J}(x, y)}, \quad x = a_3/a_1, \quad y = a_3/a_2$$

где  $\alpha, \beta$  — безразмерные значения заряда капли и напряженности электрического поля,  $a_1, a_2, a_3$  — полуоси эллипсоида.

При заданных параметрах  $\alpha, \beta$  находятся первая и вторая вариации в точке  $x, y$ . Из равенства нулю первой вариации находится серия осесимметричных фигур равновесия

$$\tilde{\Omega}^2(x) = 2\tilde{\Pi}_x(x, x)/\tilde{J}_x(x, x),$$

где индексом  $x$  обозначена производная.

Осесимметричная форма устойчива, если квадратичная форма второй вариации положительно определена. Это условие определяет интервал устойчивых осесимметричных форм равновесия  $\tilde{\Omega} \in (0, \Omega_0)$ , от

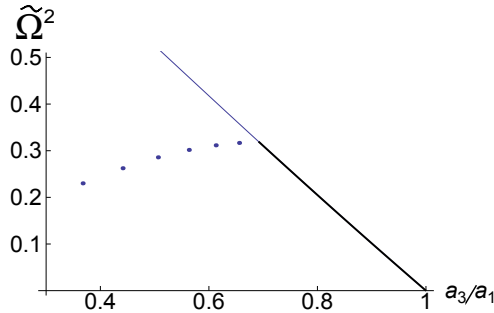


Рис. 1: Зависимости  $\tilde{\Omega}^2$  от отношения осей

которой ответвляется неосесимметричная серия фигур равновесия (см. рис.). Несимметричная серия находится из уравнений

$$-\frac{1}{2}\tilde{\Omega}^2\tilde{J}_x(x, y) + \tilde{\Pi}_x(x, y) = 0, \quad -\frac{1}{2}\tilde{\Omega}^2\tilde{J}_y(x, y) + \tilde{\Pi}_y(x, y) = 0.$$

На рис. 1 представлены зависимости  $\tilde{\Omega}^2$  от отношения осей симметричных форм капли  $a_3/a_1$  в устойчивой области (жирная линия) и трехосных эллипсоидов (точки) при отсутствии заряда и поля  $\alpha = \beta = 0$ . Аналогичные зависимости можно получить и при наличии заряда и поля  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ .

Работа выполнена по теме гос. задания (№ госрегистрации 124012500443-0).

### Список литературы

1. *Holgate J., Coppins M.* Stability, and Hysteresis of Rotating and Charged Axisymmetric Drops in a Vacuum // *Physics of Fluids*. 2018. V. 30. Art. No. 064107.
2. *Chandrasekhar S.* The Stability of a Rotating Liquid Drop // *Proc. Roy. Soc. (London)*. 1965. A286. P. 1–26.
3. *Beroz J., Hart A. J., Bush J. W. M.* Stability Limit of Electrified Droplets // *Phys. Rev. Lett.* 2019. V. 122. Art. No. 244501.
4. *Behera N., Mandal Sh., Chakraborty S.* Electrohydrodynamics Settling of Drop in Uniform Electric Field: Beyond Stokes Flow Regime // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 881. P. 498.
5. *Григорьев А.И., Щукин С.И.* Критическая равновесная сфероидальная деформация капли диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле // *Журнал технической физики*. 1999. Т. 69. № 7. С. 23.

# On the Equilibrium and Stability of Rotating Droplets in an Electric Field

*A. G. Petrov*

IPMech RAS, Moscow, Russia  
petrovipmech@gmail.com

In this paper, the forms of equilibrium and stability of droplets from the minimum energy functional condition on a family of triaxial ellipsoids are investigated.

---

УДК 531.396

## Экстремальное параметрическое возбуждение маятника при ограничениях на амплитуду и скорость управления

*М. М. Петров*

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
mikh.petrov@bk.ru

Для математического маятника без трения решена задача о поиске возмущения в специальном классе функций, реализующего наибольшее отклонение на полупериоде при наличии ограничений на величину и скорость изменения возмущений.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, параметрический резонанс, фазовые ограничения, математический маятник

### 1. Введение

Рассматривается система второго порядка с параметрическим управлением и ограничениями на величину и скорость изменения возмущения. Исследуется экстремальная задача поиска управления, обеспечивающего наибольшее отклонение решения на полупериоде. Такой подход может оказаться полезным при моделировании так называемой калорической вестибулярной стимуляции [1].

### 2. Основной результат

Перейдем к рассмотрению задачи поиска наихудшего возмущения для системы с ограничениями по амплитуде и производной у возмуще-

ний

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(1 + v(t))x_1, \end{cases}$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in (0, t_k),$$

$$x_1(t_k) \rightarrow \min_{v \in V^*}, \quad x_2(t_k) = 0,$$

$$v(0) = 0, \quad v(t_k) = 0, \quad |v(t)| \leq \mu < 1, \quad |\dot{v}(t)| \leq \eta,$$

при этом  $V^*$  — однопараметрическое семейство кусочно дифференцируемых функций, которое задается в виде многозвенников, указанных на рис. 1, где в качестве параметра  $t^*$  выступает момент времени, при котором  $v(t^*) = 0$ . Время  $t_k$  не фиксировано, а определяется как первый момент времени, когда  $x_2(t_k) = 0$ . Дополнительное требование  $v(t_k) = 0$  появляется вследствие необходимости продления решения на следующие полупериоды. Моменты времени  $t_1, \dots, t_4$  определяются следующим образом

$$t_1 = \frac{\mu}{\eta}, \quad t_2 = t^* - \frac{\mu}{\eta}, \quad t_3 = t^* + \frac{\mu}{\eta}, \quad t_4 = t_k - \frac{\mu}{\eta}.$$

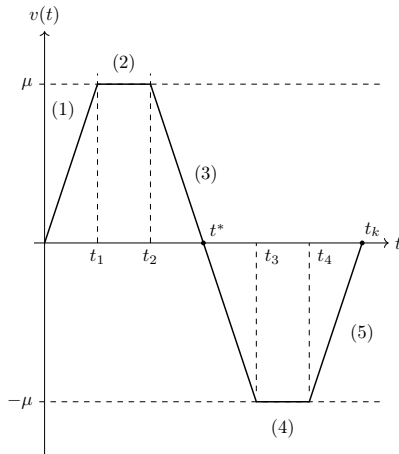


Рис. 1: Параметризация  $v$  по  $t^*$

Мотивация выбора такого класса возмущений обусловлена решением схожей задачей, но без ограничений на производную

$$x_1(t_k) \rightarrow \min_{v \in V},$$

где  $V = \{v(\cdot) \in PC : |v(t)| \leq \mu\}$ . В этом случае решение хорошо известно. С помощью принципа максимума Понтрягина наилучшее возмущение можно записать в виде

$$(2) \quad v^o = -\mu \operatorname{sign}(x_1 x_2),$$

где  $0 < \mu < 1$  — амплитуда возмущений [2].

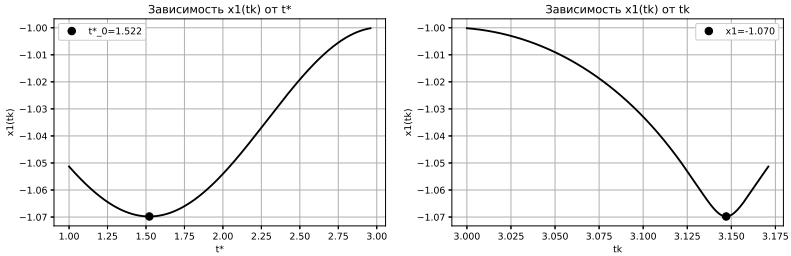


Рис. 2: Минимизация  $x_1(t_k)$  при условии  $x_2(t_k) = 0$

Если же дополнительно ввести ограничение на производную управления, задача становится существенно более сложной, и непосредственное применение принципа максимума Понтрягина оказывается затруднительным. В этой ситуации естественно рассматривать специально выделенный класс возмущений  $V^*$ , согласованный с указанными ограничениями. Решение системы (1) далее строится по участкам 1–5 с последующим склеиванием на границах по условию непрерывности и выражается в специальных функциях Эйри:

$$(3) \quad x_1(t_k(t^*)) = C_5(t^*, t_k(t^*)) Ai\left(-\frac{1}{\eta^{2/3}}\right) + C_6(t^*, t_k(t^*)) Bi\left(-\frac{1}{\eta^{2/3}}\right),$$

$$x_2(t_k) = C_5(t^*, t_k) Ai'\left(-\frac{1}{\eta^{2/3}}\right) + C_6(t^*, t_k) Bi'\left(-\frac{1}{\eta^{2/3}}\right) = 0.$$

Результат минимизации (3) при  $\eta = 0.135$ ,  $\mu = 0.1$  изображен на рис. 2. Важно заметить, что  $t_0^*$  — экстремальное значение параметра отличается от момента времени  $t_0$ , когда  $x_1(t_0) = 0$ , что соответствует моменту времени для переключения по закону (2). А именно, при данном значении параметров  $x_1(t_0^*) \approx 0.0103$ . Также из результатов численного анализа получаем, что  $t_0^* \rightarrow t_0$  при  $\eta \rightarrow \infty$ , а  $v(t) \rightarrow v^o(t)$ , представленное формулой (2).

#### Список литературы

1. Бугров Д.И., Петров М.М. Параметрическое возбуждение в модели афферентного первичного нейрона // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2025. № 3. С. 83–86.
2. Александров В.В., Жермоленко В.Н. Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1972. № 5. С. 102–108.

### Extremal Parametric Excitation of a Pendulum Under Constraints on the Amplitude and Rate of Control

*M.M. Petrov*

M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia  
mikh.petrov@bk.ru

For a frictionless mathematical pendulum, the problem of finding a perturbation within a special class of functions that yields the maximal deviation over a half-period under constraints on the magnitude and rate of variation of the perturbation is solved.

---

## Многokратная поимка убегающего в линейных нестационарных дифференциальных играх

*Н. Н. Петров*

УдГУ, Ижевск, Россия  
kma3@list.ru

Рассматривается линейная задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих с геометрическими ограничениями на управления игроков и фазовыми ограничениями на состояния убегающих. Целью группы преследователей является поимка хотя бы одного убегающего заданным числом преследователей. В предположении, что все убегающие используют одно и то же управление, получены достаточные условия разрешимости задачи преследования.

*Ключевые слова:* групповое преследование, преследователь, убегающий, многokратная поимка

### 1. Введение

Одним из направлений развития современной теории дифференциальных игр преследования–убегания является поиск методов решения задач, посвященных конфликтному взаимоотношению группы преследователей и группы убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих — противоположна. Особенностью таких игровых задач является, в частности, тот факт, что целевое множество состоит из нескольких множеств, а траекторию процесса требуется привести на их объединение, которое, как правило, не является выпуклым, даже если составляющие множества выпуклы. В том числе и поэтому для получения более содержательных условий разрешимости задач преследования–уклонения делаются различные дополнительные предположения. В данной работе представлены достаточные условия поимки одного убегающего заданным числом преследователей при условии, что все убегающие используют одно и то же управление.

### 2. Основной результат

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $n + m$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и  $m$  убегающих  $E_1, \dots, E_m$ .

Закон движения каждого из преследователей  $P_i$  имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + a(t)u_i, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad u_i \in V.$$

Закон движения каждого из убегающих  $E_j$  имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + a(t)v, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad v \in V.$$

Здесь  $i \in I = \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in J = \{1, \dots, m\}$ ,  $x_i, y_j, x_i^0, y_j^0, u_i, v \in \mathbb{R}^k$ ,  $V = \{v \in \mathbb{R}^k \mid \|v\| \leq 1\}$ ,  $A$  — непрерывная матричная функция порядка  $k \times k$ ,  $a(t)$  — скалярная функция. Считаем, что  $x_i^0 \neq y_j^0$  для всех  $i \in I$ ,  $j \in J$ .

Дополнительно предполагается, что каждый убегающий  $E_j$ ,  $j \in J$  не покидает пределы выпуклого многогранного множества

$$D = \{y \in \mathbb{R}^k \mid (p_s, y) \leq \beta_s, \quad s = 1, \dots, r_0\},$$

где  $p_1, \dots, p_{r_0}$  — единичные векторы  $\mathbb{R}^k$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_{r_0}$  — вещественные числа,  $(u, v)$  — скалярное произведение векторов  $u, v \in \mathbb{R}^k$ . Считаем, что  $D = \mathbb{R}^k$  при  $r_0 = 0$ .

Пусть  $v : [t_0, +\infty) \rightarrow V$  — измеримая функция, которую будем называть допустимой.

Обозначим данную игру  $\Gamma(n, m)$ .

**Определение 1.** В игре  $\Gamma(n, m)$  происходит  $q$ -кратная поимка (при  $q = 1$  поимка), если существуют момент  $T > t_0$ , квазистратегии [1]  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  такие, что для любой допустимой функции  $v(\cdot)$  найдутся номера  $i_1, \dots, i_q \in I$ ,  $l \in J$ , моменты времени  $\tau_1, \dots, \tau_q \in [t_0, T]$  для которых  $x_{i_\alpha}(\tau_{i_\alpha}) = y_l(\tau_{i_\alpha})$ ,  $\alpha = 1, \dots, q$ .

**Определение 2.** Функция  $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется рекуррентной по Зубову [2], если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $T(\varepsilon) > 0$  такое, что для любых  $a, t \in \mathbb{R}^1$  существует  $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$  для которых справедливо неравенство

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Функция  $f : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется рекуррентной на  $[t_0, \infty)$ , если существует рекуррентная функция  $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ , такая что  $f(t) = F(t)$  для всех  $t \in [t_0, \infty)$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия.

1. Фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  системы  $\dot{\omega} = A(t)\omega$ ,  $\Phi(t_0) = E$  является рекуррентной по Зубову на  $[t_0, +\infty)$  функцией, а ее производная равномерно ограничена на  $[t_0, +\infty)$ , где  $E$  — единичная матрица.

2.  $a(t) = 1$  для всех  $t \geq t_0$ ,  $D = \mathbb{R}^k$ .

3.  $q \geq 2$  и существует множество  $I_0 \subset I$ ,  $|I_0| = n - q(m - 1)$ , что для любого множества  $J_0 \subset I_0$ ,  $|J_0| = q - 1$  выполнено

$$\text{Int co}\{x_i^0, i \in I_0 \setminus J_0\} \cap \{y_j^0, j \in J\} \neq \emptyset.$$

Здесь  $\text{Int}X$ ,  $\text{co}X$  соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества  $X$ . Тогда в игре  $\Gamma(n, m)$  происходит  $q$ -кратная поимка.

*Замечание 1.* Отметим, что условие 1 теоремы 1, в частности, будет выполнено, если либо  $A(t) = 0$  для всех  $t \geq t_0$ , либо  $A(t) = A$  для всех  $t \geq t_0$ , причем все собственные числа матрицы  $A$  являются простыми и чисто мнимыми.

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия

1.  $A(t) = 0$  для всех  $t \geq t_0$ ,  $\int_{t_0}^{+\infty} |a(s)| ds = +\infty$ ,  $r_0 = 1$ .

2.  $q \geq 2$  и существует множество  $I_0 \subset I$ ,  $|I_0| = n - q(m - 1)$ , что для любого  $J_0 \subset I_0$ ,  $|J_0| = q - 1$  выполнено

$$\text{Int co}\{x_i^0, i \in I_0 \setminus J_0, p_1\} \cap \text{co}\{y_j^0, j \in J\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре  $\Gamma(n, m)$  происходит  $q$ -кратная поимка.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (Проект № FEWS-2024-0009).

### Список литературы

1. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
2. Зубов В.И. К теории рекуррентных функций // Сибирский математический журнал. 1962. Т. III. № 4. С. 532–560.

## Multiple Capture of an Evader in Linear Nonstationary Differential Games

*N. N. Petrov*

Udmurt State University of Izhevsk, Russia  
kma3@list.ru

A linear conflict interaction problem involving a group of pursuers and a group of evaders is studied under geometric constraints on the players'

controls and phase constraints on the evaders' states. The aim of the pursuers is the capture of at least one evader by a prescribed number of pursuers. Assuming that all evaders employ the same control, sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem are derived.

---

УДК 517.92

## **Импульсная стабилизация нелинейных нестационарных систем с переключениями**

*А. В. Платонов*

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия  
a.platonov@spbu.ru

В работе рассматривается проблема устойчивости одного класса нелинейных нестационарных систем с переключениями и импульсными воздействиями. Предполагается, что переключения осуществляются между однородными относительно вектора состояния подсистемами, причем порядки однородности этих подсистем могут быть различны. Устанавливаются ограничения на закон переключений/импульсов, обеспечивающие асимптотическую устойчивость нулевого решения. Исследуется влияние нестационарных возмущений на устойчивость заданной номинальной системы.

*Ключевые слова:* нелинейные нестационарные системы, переключения, импульсы, устойчивость, возмущения

### **1. Введение**

Проблема анализа устойчивости динамических систем является одной из актуальных в теории управления. Часто реальную систему аппроксимируют некоторой более простой моделью таким образом, чтобы устойчивость этой модельной системы влекла за собой устойчивость исходной системы. Так еще А.М. Ляпуновым были доказаны теоремы об устойчивости по линейному приближению. Позднее многими учеными были предложены критерии устойчивости и по нелинейному приближению, причем часто в качестве такого нелинейного приближения использовались однородные системы (см., например, [1]). Исследование устойчивости значительно усложняется, если заданная система нестационарна, а также подвержена переключениям и импульсным

воздействиям, т.е. имеет гибридную природу.

## 2. Основной результат

Пусть задана система с переключениями

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\sigma(t, \mathbf{x}).$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  — вектор состояния;  $\sigma = \sigma(t) : [0, +\infty) \rightarrow Q = \{1, \dots, N\}$  — кусочно-постоянная функция, задающая закон переключений; элементы векторов  $\mathbf{F}_s(t, \mathbf{x})$  непрерывны относительно  $t \geq 0$ , а также непрерывно дифференцируемы и однородны порядка  $\mu_s > 1$  относительно  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $s = 1, \dots, N$ . Функцию  $\sigma(t)$  считаем правосторонне непрерывной в точках разрыва.

Предположим также, что решения системы (1) могут подвергаться импульсным воздействиям

$$(2) \quad \mathbf{x}(\hat{\tau}_i^+) = \mathbf{g}_{\hat{\tau}_i}(\mathbf{x}(\hat{\tau}_i^-)), \quad i = 1, 2, \dots$$

Здесь  $0 = \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \hat{\tau}_2 < \dots$  — моменты импульсов;  $\mathbf{x}(\hat{\tau}_i^+)$  и  $\mathbf{x}(\hat{\tau}_i^-)$  — правостороннее и левостороннее значения рассматриваемого решения системы (1) в точке  $\hat{\tau}_i$ ; непрерывная при  $\mathbf{x} \in R^n$  функция  $\mathbf{g}_{\hat{\tau}_i}(\mathbf{x})$  определяет величину скачка решения в момент времени  $\hat{\tau}_i$ ;  $\mathbf{g}_{\hat{\tau}_i}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Решение гибридной системы (1), (2) считаем правосторонне непрерывным в импульсные моменты времени.

Полагаем, что общее количество моментов переключений/импульсов на промежутке  $[0, +\infty)$  бесконечно, в то время как на любом конечном интервале времени их число конечно.

Цель настоящей работы — установить достаточные условия на закон переключений/импульсов, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), (2) и обеспечивающие требуемую скорость переходных процессов в системе. Кроме того, исследуется вопрос сохранения указанных характеристик решений при влиянии на систему (1) возмущающих воздействий:

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\sigma(t, \mathbf{x}) + \mathbf{G}(t, \mathbf{x}).$$

Здесь векторная функция  $\mathbf{G}(t, \mathbf{x})$  определена в области  $t \geq 0$ ,  $\|\mathbf{x}\| < H$  ( $H = \text{const} > 0$ ), и  $\mathbf{G}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ . Полагаем, что на временных интервалах между последовательными моментами переключений/импульсов выполнены условия, гарантирующие существование решений задачи Коши для системы (3), а также их непрерывную зависимость от начальных данных.

*Замечание 1.* Указанная выше задача решалась в работе [2] при предположении, что  $\mu_1 = \dots = \mu_N$ . В настоящей работе показывается, что предложенные в [2] подходы распространяются и на гибридные системы с переключаемыми порядками однородности.

Для анализа устойчивости невозмущенной гибридной системы будем строить множественную функцию Ляпунова  $V_{\sigma(t)}(\mathbf{x})$  в виде совокупности положительно определенных непрерывно дифференцируемых при  $\mathbf{x} \in R^n$  однородных функций некоторого порядка  $\gamma > 1$ . Тогда [1] найдется такое  $H_1 > 0$ , что при  $t \geq 0$ ,  $\|\mathbf{x}\| < H_1$  будет справедливо дифференциальное неравенство вида

$$(4) \quad \left( \frac{\partial V_{\sigma(t)}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{F}_{\sigma(t)}(t, \mathbf{x}) \leq \eta(t) V_{\sigma(t)}^{1+\rho(t)}(\mathbf{x}),$$

где  $\eta(t)$  — кусочно-непрерывная функция;  $\rho(t) = (\min_{s \in Q} \mu_s - 1)/\gamma$ , если  $\eta(t) \geq 0$ , и  $\rho(t) = (\max_{s \in Q} \mu_s - 1)/\gamma$ , если  $\eta(t) < 0$ .

Определим моменты перемены знака функции  $\eta(t)$  (с неотрицательного значения на отрицательное или наоборот). Будем считать, что на любом конечном интервале времени их число конечно. Объединим последовательности моментов переключений, моментов импульсов и моментов перемены знака коэффициента  $\eta(t)$  в одну единую последовательность  $\{\tau_i\}_{i=1,2,\dots}$ . Таким образом, в каждый момент времени  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , происходит хотя бы одно из следующих событий: переключение режима функционирования системы (1) (что влечет за собой смену частной функции Ляпунова и разрыв коэффициента  $\eta(t)$ ), импульсное воздействие (вызывающее разрыв решения системы), перемена знака нестационарного коэффициента  $\eta(t)$  (что приводит к переключению показателя степени в дифференциальном неравенстве (4)).

Относительно импульсных воздействий предположим, что существуют такие постоянные  $c_i > 0$ , что при  $\mathbf{x} \in R^n$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{g}_{\hat{\tau}_i}(\mathbf{x})\| \leq c_i \|\mathbf{x}\|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Интегрируя дифференциальные неравенства (4) и учитывая скачки, совершаемые функцией Ляпунова  $V_{\sigma(t)}(\mathbf{x})$  и ее производной в силу рассматриваемой системы в моменты  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , придем к искомым условиям асимптотической устойчивости. Далее для возмущенной гибридной системы (3), (2) в работе предлагается подход, позволяющий свести условия асимптотической устойчивости нулевого решения к условиям сходимости некоторого вспомогательного числового ряда.

Этот подход развивается для случая, когда главную роль в достижении асимптотической устойчивости играют импульсные воздействия.

#### Список литературы

1. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974.
2. *Платонов А.В.* Об устойчивости по нелинейному нестационарному гибриднему приближению // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60. № 12. С. 1640–1652.

### Impulsive Stabilization of Nonlinear Non-stationary Switched Systems

*A. V. Platonov*

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia  
a.platonov@spbu.ru

The paper considers the stability problem for a class of nonlinear non-stationary systems with switching and impulsive effects. It is assumed that switching takes place between subsystems that are homogeneous relative to the state vector, and the orders of homogeneity of these subsystems may be different. Constraints on the switching/impulse law are established to ensure the asymptotic stability of the zero solution. The effect of non-stationary perturbations on the stability of the given nominal system is investigated.

---

## Алгоритм решения задачи быстродействия для системы с дискретным временем на основе суперэллипсоидальных аппроксимаций

*В. М. Подгорная, Д. Н. Ибрагимов*

МАИ (НИУ), Москва, Россия  
vita1401@outlook.com, rikk.dan@gmail.com

Для линейной дискретной системы с ограниченным управлением решается задача быстродействия. Когда на управление наложены суперэллипсоидальные ограничения, полное решение сводится к вычислению единственного корня системы алгебраических уравнений. Для системы общего вида предложен алгоритм, основанный на суперэллипсоидальных аппроксимациях.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, дискретные системы, задача быстродействия, суперэллипсоидальные аппроксимации

### 1. Введение

В задаче быстродействия для систем с дискретным временем классический принцип максимума, как правило, приобретает вырожденный характер, что определяет сложности ее решения. Известен подход, основанный на регуляризации соотношений принципа максимума при использовании суперэллипсоидальных аппроксимаций [1, 2]. Также достаточно эффективен метод последовательных улучшений Кротова [3]. В данной работе рассматривается объединение этих подходов.

### 2. Постановка задачи

Рассматривается нестационарная линейная система управления с дискретным временем и ограниченными множествами допустимых значений управления  $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ :

$$(1) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}(k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathcal{U}(k) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{A} = \{A(k)\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ . Предполагается, что для каждого  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  множество  $\mathcal{U}(k)$  является выпуклым и компактным,  $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det A(k) \neq 0$ . Требуется перевести систему (1) из заданного начального состояния  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в начало координат за минимальное число шагов  $N_{\min}$ .

### 3. Критерий оптимальности

Положим для всех  $N \in \mathbb{N}$  и  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathbf{A}_{N,k} \triangleq A(N+k-1) \cdot \dots \cdot A(k),$$

$$o_k \in \mathbb{R}^n, B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, a_1(k), \dots, a_n(k) > 0, r_k > 1, q_k = \frac{r_k}{r_k - 1},$$

$$I_r(x) \triangleq \left( \text{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \dots, \text{sign}(x_n)|x_n|^{r-1} \right)^\top.$$

На основе регуляризованного принципа максимума [2] получен критерий оптимальности, когда для всех  $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$  на значения управления наложены суперэллипсоидальные ограничения:

$$(2) \quad \mathcal{U}(k) = B_k \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i(k)} \right|^{r_k} \leq 1 \right\} + o_k.$$

**Теорема 1.** Пусть в системе  $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$  верно (2) и  $x_0 \neq 0$ . Тогда для каждого  $N \in \mathbb{N}$  существует единственное решение системы

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{\alpha} \left( x_0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{j,0}^{-1} o_{j-1} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^N \frac{A_{j,0}^{-1} B_{j-1} \text{diag}(a(j-1)) I_{q_k} \left( \text{diag}(a(j-1)) (A_{j,0}^{-1} B_{j-1})^\top \psi(0) \right)}{\| \text{diag}(a(j-1)) (A_{j,0}^{-1} B_{j-1})^\top \psi(0) \|_{q_k}^{q_k - 1}}, \\ & \langle \psi(0), \psi(0) \rangle = 1, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \right.$$

При этом верно

$$1. N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} : \alpha < 1\};$$

2. оптимальное по быстродействию управление для всех  $k = \overline{0, N-1}$  при  $N = N_{\min}$  определяется из условий

$$\psi(k+1) = \left( A^{-1}(k) \right)^\top \psi(k),$$

$$u^*(k) = \alpha \frac{B_k \text{diag}(a(k)) I_{q_k} \left( \text{diag}(a(k)) B_k^\top \psi(k+1) \right)}{\| \text{diag}(a(k)) B_k^\top \psi(k+1) \|_{q_k}^{q_k - 1}} + (1 - \alpha) o_k.$$

Возможность использования теоремы 1 в случае произвольных геометрических ограничений на управление сводится к использованию методов суперэллипсоидальной аппроксимации множеств из последовательности  $\mathcal{U}$ . Подробно данные методы рассмотрены в [1].

Для уточнения решения задачи быстродействия в сравнении с [1] предлагается использовать суперэллипсоидальные аппроксимации многократно.

**Алгоритм 1.** 1. Положить  $l = 0$ ,  $o_k^{(l)} = 0$  для всех  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

2. Построить суперэллипсоидальные аппроксимации  $\hat{U}^{(l)}(k)$  в соответствии с [1].

3. Вычислить время быстродействия  $N_{\min}^{(l)}$  и оптимальное управление  $\{\hat{u}^{(l)}(k)\}_{k=0}^{N_{\min}^{(l)}-1}$  для системы  $(\mathcal{A}, \hat{U}^{(l)})$  согласно теореме 1.

4. Положить  $o_k^{(l)} = \hat{u}^{(l)}(k)$ ,  $k = 0, \overline{N_{\min}^{(l)} - 1}$ , увеличить  $l$  на 1 и перейти к шагу 2.

#### 4. Заключение

Построенный в работе алгоритм 1 позволяет улучшить решение задачи быстродействия, полученное в [1, 2]. Доказано, что он гарантированно не ухудшает управление в смысле критерия качества. Актуальным является доказательство сходимости решения, полученного при помощи алгоритма 1, к оптимальному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-21-00487), <https://rscf.ru/project/25-21-00487/>.

#### Список литературы

1. Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Формирование оптимального по быстродействию ограниченного управления для линейных дискретных систем на основе метода суперэллипсоидальной аппроксимации // АиТ. 2023. № 9. С. 37–67.
2. Подгорная В.М. О субоптимальном решении задачи быстродействия для линейной дискретной системы в случае несимметричных ограничений на управления // Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 3. С. 63–86.
3. Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А. Численный метод решения задачи быстродействия для линейных нестационарных дискретных систем общего вида // АиТ. 2025. № 11. С. 3–34.

# The Algorithm for Solving Time-Optimization Problem for a Discrete-Time System Based on Superellipsoidal Approximations

*V. M. Podgornaya, D. N. Ibragimov*

Moscow Aviation Institute, Russia  
vita1401@outlook.com, rikk.dan@gmail.com

A time-optimization problem is solved for a linear discrete-time system with constrained control. When superellipsoidal constraints are imposed on the control, the solution is reduced to calculating a single root of a system of algebraic equations. For a general system, an algorithm based on superellipsoidal approximations is proposed.

---

УДК 519.977.3

## О задаче противодействия наблюдателю с псевдоизмерениями

*А. П. Потанов, А. А. Галаев*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
potanov@ipu.ru, galaev@ipu.ru

В работе рассматривается система из трех объектов на плоскости — Атакующего, Защитника и Цели. Задачей Атакующего является перехват Цели. Для этого он использует фильтр Калмана–Бьюси с псевдонаблюдениями, восстанавливая состояние Цели по измерениям ее пеленга. Защитник, в свою очередь, должен препятствовать перехвату Цели, воздействуя на приемный канал Атакующего. Для формирования траектории движения Защитника ставится задача оптимального противодействия и находится условно-программное управление, обеспечивающее максимальное удаление Атакующего от Цели.

*Ключевые слова:* Оптимальное управление, управление наблюдениями, фильтр Калмана, противодействие перехвату

## 1. Описание динамической системы

Рассмотрим движение трех объектов в плоскости  $Oxy$ . Динамика каждого объекта описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_q(t) = v_{x_q}(t) + w_{x_q}(t), \\ \dot{v}_{x_q}(t) = u_{x_q}(t) + w_{v_{x_q}}(t), \\ \dot{y}_q(t) = v_{y_q}(t) + w_{y_q}(t), \\ \dot{v}_{y_q}(t) = u_{y_q}(t) + w_{v_{y_q}}(t), \end{cases}$$

где  $q$  — любой из символов  $A, D, T$ , обозначающих, соответственно, Атакующего, Защитника и Цель, а  $w$  — случайный гауссовский процесс.

Управление Цели  $u_{x_T}(t) = u_{y_T}(t) = 0$  будем считать нулевым на всем промежутке времени:  $u_T(t) = 0$ . После этого перейдем в относительные координаты  $e$  и  $\varepsilon$ :

$$e = \begin{pmatrix} x_A - x_T \\ v_{x_A} - v_{x_T} \\ y_A - y_T \\ v_{y_A} - v_{y_T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \\ v_x \\ e_y \\ v_y \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} x_A - x_D \\ v_{x_A} - v_{x_D} \\ y_A - y_D \\ v_{y_A} - v_{y_D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ v_x \\ \varepsilon_y \\ v_y \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения динамики Цели и Защитника в относительных координатах  $e$  и  $\varepsilon$  имеют вид

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{e} = Fe + Bu_A - Bu_T + w_e, \\ \dot{\varepsilon} = F\varepsilon + Bu_A - Bu_D + w_\varepsilon, \end{cases}$$

где

$$u_A = \begin{pmatrix} u_{x_A} \\ u_{y_A} \end{pmatrix}, \quad u_D = \begin{pmatrix} u_{x_D} \\ u_{y_D} \end{pmatrix}, \quad w_e \propto \mathcal{N}[0, \sigma_e], \quad w_\varepsilon \propto \mathcal{N}[0, \sigma_\varepsilon]$$

Пусть атакующий игрок производит оценку относительного положения Цели. При этом единственной доступной измерению величиной для него является пеленг Цели  $\theta_T(t)$  или Защитника  $\theta_D(t)$ :

$$(2) \quad \theta_T(t) = \varphi_T(t) + \delta(t), \quad \delta \propto \mathcal{N}[0, \sigma_\delta],$$

$$(3) \quad \theta_D(t) = \varphi_D(t) + \delta(t), \quad \delta \propto \mathcal{N}[0, \sigma_\delta],$$

где

$$\varphi_T(t) = \arctan \frac{e_x}{e_y}, \quad \varphi_D(t) = \arctan \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y}.$$

Известно, что при динамике объекта наблюдений, описываемой первым уравнением системы (1), и канале наблюдений, описываемым уравнением (2), оказывается эффективным подход, использующий псевдоизмерения [1, 2]. Положим также, что Атакующий в каждый момент времени может с вероятностью  $p$  измерить пеленг Цели  $\theta_T$ , а с вероятностью  $1 - p$  — пеленг Защитника  $\theta_D$ , а для перехвата использует закон наведения

$$u_A(t) = \lambda \hat{e}(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

В таком случае объединяя систему уравнений динамики (1) и уравнения фильтра, можно получить замкнутую систему стохастических дифференциальных уравнений в виде

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{e} = Fe + B\lambda\hat{e} - Bu_T + w_e, \\ \dot{\varepsilon} = F\varepsilon + B\lambda\hat{e} + Bu_D + w_\varepsilon, \\ \dot{\hat{e}} = (F + B\lambda)\hat{e} - Bu_T - \\ - \frac{1}{\hat{r}\sigma_\delta}\gamma \left[ qH^T(\theta_T)H(\theta_T)e + (1-q)H^T(\theta_D)H(\theta_D)\varepsilon \right], \\ \dot{\gamma} = F\gamma + \gamma F^T - \\ - \frac{1}{\hat{r}\sigma_\delta}\gamma \left[ qH^T(\theta_T)H(\theta_T) + (1-q)H^T(\theta_D)H(\theta_D) \right] \gamma + \sigma_e, \end{cases}$$

где  $H(\theta) = (-\cos \theta \quad 0 \quad \sin \theta \quad 0)$ .

## 2. Постановка задачи

Для системы (4) ставится следующая

**Задача 1.** Для системы (4),  $t \in [0, t_*]$ , требуется найти управление  $u_D(t) : |u_D| \leq \varkappa$ , которое доставляет максимум критерию

$$(5) \quad J[e] = \mathbb{E} \left( e^T(t_*)e(t_*) \right)$$

при

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e(0) &= \mu_e(0), & \mathbb{E} \varepsilon(0) &= \mu_\varepsilon(0), \\ \mathbb{E} \hat{e}(0) &= \hat{\mu}_e(0), & \mathbb{E} \gamma(0) &= \mu_\gamma(0), \\ \text{var } e(0) &= \Sigma_e(0), & \text{var } \varepsilon(0) &= \Sigma_\varepsilon(0), \end{aligned}$$

$$\text{cov} \left\{ \gamma_j^i(0), \gamma_l^k(0) \right\} = \Gamma_{jl}^{ik}(0).$$

Оптимальное управление в задаче 1 удается найти в классе условно-программных, переходя к детерминированной системе уравнений математических ожиданий и дисперсий случайных процессов системы (4) и решая для нее задачу оптимального управления. Вид закона управления в последней можно получить аналитически, а его конкретная реализация при заданных начальных условиях может быть получена методом последовательных приближений.

#### Список литературы

1. *Миллер А.Б., Миллер Б.М.* Отслеживание подводной цели с использованием пеленгационной информации // Информационные процессы. 2016. № 2. С. 103–111.
2. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука. 1982.

#### On on the Counteractions Against an Observer with Pseudomeasurements

*A. P. Potapov, A. A. Galaev*

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia  
potapov@ipu.ru, galaev@ipu.ru

The paper considers a system of three objects on a plane: Attacker, Defender and Target. Attacker's goal is to intercept the Target. To do this, it uses a Kalman–Busy filter with pseudomeasurements, estimating the Target's state by measuring its bearing. Defender must prevent the interception by affecting the Attacker's receptoion channel. To form the trajectory of the Defender, the optimal counteraction problem is set and conditional program control is used to maximize distance of Attacker from the Target.

---

## О параметрах компенсирующих устройств при перемещении космического аппарата с солнечным парусом вдоль леерной связи

*А. В. Родников*

МАИ (НИУ), Москва, Россия  
springer@inbox.ru

Влияние движения космического аппарата с солнечным парусом вдоль троса, соединяющего гелиоцентрические космические станции на взаимное расположение этих станций может быть компенсировано дополнительными неизменно ориентированными солнечными парусами.

*Ключевые слова:* солнечный парус, космическая тросовая система

Изучается относительное движение космической тросовой системы, состоящей из двух тяжелых космических станций, описывающих одну гелиоцентрическую круговую орбиту и соединенных тросом, вдоль которого может перемещаться легкий космический аппарат (КА), оснащенный солнечным парусом (СП). Рассматривается ситуация, когда радиус орбиты близок к 1 а.е., расстояние между станциями не превышает 200 км, отношение  $e$  этого расстояния к длине троса меньше 1, а сам трос принимается невесомым, нерастяжимым и абсолютно гибким, то есть реализующим так называемую леерную связь, отношение массы КА к сумме масс станций  $\varepsilon \leq 0.005$ , парусность, то есть отношение площади СП к массе КА не меньше  $1 \text{ м}^2/\text{кг}$ . Нетрудно убедиться в том, что если при движении КА трос натянут, станции будут достаточно быстро сближаться, несмотря на объективную малость действующих сил.

В [2] показано, что если СП во все время движения КА ортогонален солнечным лучам, то станции можно оснастить дополнительными солнечными парусами, которые можно развернуть так, что расстояние между станциями в конце движения КА будут таким же, как и в начале. Однако, тот же самый подход можно применить и в случае достаточно произвольного закона управления положением СП по отношению к направлению солнечных лучей. Прежде всего, заметим, что возможности каждого конкретного солнечного паруса можно определить некоторой безразмерной функцией, выражающей зависимость между величиной силы солнечной радиации, действующей на парус, и

углом между этой силой и направлением солнечных лучей. Будем называть эту функцию Базовой калибровочной характеристикой (БКХ).

Обозначим БКХ входящих в рассматриваемую систему парусов через  $f_i(\gamma)$ , где  $i = 0$  соответствует основному СП, а  $i = 1, 2$  — парусам, установленным на станциях,  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{i,max} < \pi/2$ ,  $\gamma_{i,max}$  — максимальный возможный угол наклона силы солнечной радиации, действующей на  $i$ -й парус. При этом величину силы солнечной радиации  $F_i$ , действующей на  $i$ -й парус под углом  $\gamma$  к направлению солнечных лучей будем вычислять по формуле

$$(1) \quad F_i = F_{i,max} f_i(\gamma),$$

где  $F_{i,max}$  — максимально возможная величина сила солнечной радиации, действующая на  $i$ -й парус. Заметим, что как следует из [1], если  $i$ -й парус является идеально отражающим зеркалом, то  $f_i(\gamma) = \cos^2 \gamma$ .

Будем рассматривать относительные перемещения только в плоскости орбиты станций. Перемещение КА с СП может влиять на положение станций только если трос натянут. В каждый такой момент КА с СП находится в некоторой точке границы эллипса с эксцентриситетом  $e$  и фокусами в точках закрепления троса. Пусть  $\psi$  — эксцентрическая аномалия этой точки. Ограничимся рассмотрением только таких ситуаций, когда при движении КА вдоль границы такого эллипса положение СП определяется только координатой  $\psi$ . Предположим, что КА начинает движение из точки  $\psi_0$  в точку  $\psi_1$ , причем закон управления ориентацией основного СП определяется некоторой функцией  $\gamma(\psi)$ . Кроме того, пусть в начальный момент момент станции находятся на своей первоначальной орбите. Заметим, что траектория КА в орбитальной системе отсчета не является дугой эллипса, так как величина  $e$  меняется в процессе движения.

Попробуем подобрать параметры дополнительных парусов таким образом, чтобы их ориентация по отношению к направлению солнечных лучей была неизменной во все время перемещения КА, а расстояние между станциями в момент достижения КА точки  $\psi_1$  было таким же, как в начале движения. Для этого, также как и в [2], запишем общие уравнения движения, выразим из них старшие производные обобщенных переменных. Далее, пусть  $e = \sin \beta$ , причем  $\beta = \beta_0 + \varepsilon \beta_1$ , а  $\sin \beta_0$  — начальное значение  $e$ . Кроме того, пусть  $\varepsilon \varphi_1$  — угол поворота отрезка, соединяющего станции, по отношению к касательной к их первоначальной орбите. Удержав в уравнениях движения только старшие слагаемые в разложениях правых частей по  $\varepsilon$ , заметим, что

уравнение для координаты  $\psi$  будет таким же, как если бы станции были неподвижны в инерциальной системе отсчета, а на КА действовала бы только сила солнечной радиации и реакция троса. Интегрируя это уравнение, можно получить соотношение

$$(2) \quad \dot{\psi}^2 = G(\gamma(\psi), \psi_0, \psi_1),$$

где штрих обозначает производную по некоторому безразмерному времени. Далее, рассматривая только движения с монотонным изменением переменной  $\psi$ , уравнения для  $\beta_1$  и  $\varphi_1$  можно привести к виду

$$(3) \quad \begin{aligned} \sqrt{G} \frac{d}{d\psi} \left( \sqrt{G} \frac{d\beta_1}{d\psi} \right) &= K_{11} \frac{F_{2,max} f_2(\gamma_2) \cos \gamma_2 - F_{1,max} f_1(\gamma_1) \cos \gamma_1}{F_{0,max}} - K_{12}, \\ \sqrt{G} \frac{d}{d\psi} \left( \sqrt{G} \frac{d\varphi_1}{d\psi} \right) &= K_{21} \frac{F_{1,max} f_1(\gamma_1) \sin \gamma_1 - F_{2,max} f_2(\gamma_2) \sin \gamma_2}{F_{0,max}} - K_{22}, \end{aligned}$$

где  $K_{ij}$  зависят от  $\psi$  и постоянных  $\psi_0, \psi_1, \beta_0$ , причем  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — искомые постоянные углы наклона сил солнечной радиации, действующих на дополнительные паруса. Для достижения поставленной цели необходимо выполнение равенств  $\beta_1(\psi_0) = \beta_1(\psi_1) = 0$ . Потребуем также выполнения аналогичных соотношений для  $\varphi_1$ , то есть  $\varphi_1(\psi_0) = \varphi_1(\psi_1) = 0$ . Интегрируя (3) с учетом этих краевых условий, получим алгебраические уравнения для определения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

### Список литературы

1. Поляжова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом. М.: Либроком, 2011.
2. Rodnikov A.V. On Keeping the Distance between Space Stations Tethered by a Handrail // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2025. V. 21. No. 4. P. 539–549.

## On the Compensating Devices Parameters When Moving a Spacecraft With a Solar Sail Along a Handrail Constraint

A. V. Rodnikov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia  
springer@ainbox.ru

The influence of a sailed spacecraft motion along a tether, connecting heliocentric space stations, on the relative locations of these stations can be compensated by additional, constantly oriented solar sails.

## **Использование скользящего управления с изменяющейся поверхностью для построения магнитного управления ориентацией спутника**

*Д. С. Ролдугин, Я. В. Маштаков*

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
rolduginds@keldysh.ru, yarmashtakov@keldysh.ru

В работе строится скользящее управление ориентацией космического аппарата. Управление осуществляется с помощью магнитных катушек, что накладывает ограничение на направление вектора управляющего момента — он должен быть перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Чтобы получить такое управление, классическая линейная скользящая поверхность оснащается дополнительным слагаемым. Разработана процедура расчета этого слагаемого на последовательных тактах управления. Работоспособность управления проверена при моделировании стабилизации в инерциальных и орбитальных осях.

*Ключевые слова:* магнитное управления, скользящее управление, спутник, ориентация

### **1. Введение**

Ключевой проблемой на пути использования магнитной системы ориентации является ограничение на направление управляющего момента, который оказывается перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. Факт управляемости такой системы доказан, но возникают серьезные помехи на пути практической реализации управления. В работе предлагается использовать скользящее управление, учитывая при этом тот факт, что задача стабилизации космического аппарата в заданном положении заменяется на задачу стабилизации на поверхности, при движении которой нужный конечный результат обеспечивается естественным образом. Это вносит некоторую свободу в построение управления, которую можно использовать, чтобы рассчитанный управляющий момент был перпендикулярен вектору геомагнитной индукции. При этом желательно сохранить вычислительную простоту процедуры поиска управления, ограничиваясь набором нескольких последовательных вычислений без подключения оптимизационных, итерационных и т.п. процедур.

### **2. Основной результат**

В работе предлагается использовать скользящую поверхность вида

$$\mathbf{x} = \lambda_\omega \omega + \lambda_S \mathbf{S} + \lambda_q q_0 \mathbf{q}^\perp.$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость космического аппарата,  $\mathbf{S} = 4q_0 \mathbf{q}$  характеризует ошибку ориентации относительно требуемой в терминах скалярной и векторной частей кватерниона ориентации,  $\mathbf{q}^\perp$  — дополнительный член, перпендикулярный векторной части кватерниона. Его выбор позволяет строить поверхность так, чтобы на каждом такте управления момент был перпендикулярен вектору геомагнитной индукции.

Подбор члена  $\mathbf{q}^\perp$  требует либо задания его как функции состояния аппарата и времени, либо пошагового расчета на каждой итерации. Был выбран второй путь, при котором производная дополнительного члена аппроксимируется в виде конечной разности

$$\dot{\mathbf{q}}_k^\perp \approx \frac{\mathbf{q}_{k-2}^\perp - 4\mathbf{q}_{k-1}^\perp + 3\mathbf{q}_k^\perp}{2h}.$$

Подстановка уравнения поверхности в уравнения движения приводит к выражению для вычисления управляющего момента  $\mathbf{M} = \mathbf{a} - \mathbf{C}\mathbf{q}_k^\perp$ , в котором вектор  $\mathbf{a}$  и матрица  $\mathbf{C}$  известны — они зависят от текущего вектора состояния и величин дополнительного члена на предыдущих итерациях. Вектор  $\mathbf{M}$  должен быть перпендикулярен вектору индукции. Кроме того, вектор  $\mathbf{q}^\perp$  должен быть перпендикулярен вектору кватерниона. Получается, на три компоненты  $\mathbf{q}^\perp$  накладываются два ограничения.

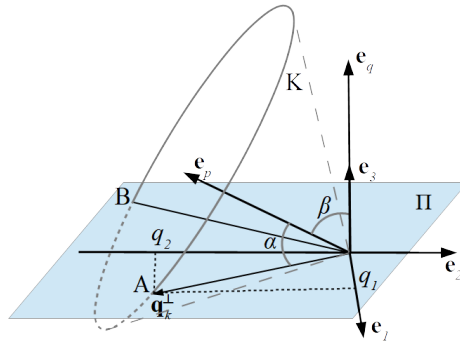


Рис. 1: Геометрия ограничений

Теоретически, найти этот вектор можно. Возникают, однако, практические ограничения, связанные с реальными условиями реализации управления. В итоге получается обратная ситуация: ограничений больше, чем искомым параметров, но зачастую удовлетворить им можно. Рис. 1 показывает геометрию возникающих ограничений. Плоскость  $\Pi$  перпендикулярна векторной части кватерниона ориентации, так что  $\mathbf{q}^\perp$  должен лежать в этой плоскости. Конус  $K$  отвечает условию перпендикулярности векторов индукции и управления. Пересечение  $\Pi$  и  $K$  дает искомые решения. Однако, для пересечения необходимо увеличивать  $\mathbf{q}^\perp$ , что практически невозможно. В работе построения геометрическая процедура вычисления  $\mathbf{q}^\perp$ , основанная на рис. 1.

Результат моделирования движения типового аппарата массой в несколько десятков килограмм приведен на рис. 2.

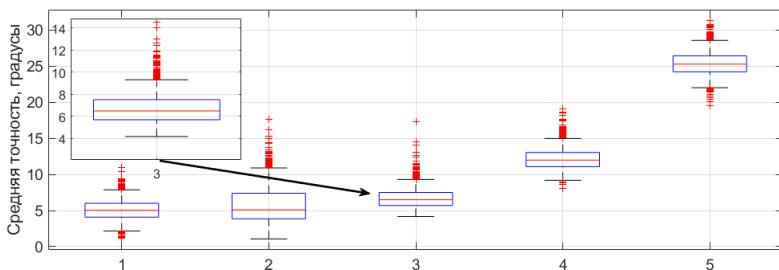


Рис. 2: Стабилизация в орбитальной системе координат

В первом сценарии учитывается влияние основных возмущений — аэродинамического момента, остаточного дипольного момента, случайных неизвестных моментов. Во втором учитывается неточность знания моментов инерции (величины главных моментов отличаются на 5%, направления осей известны с ошибкой  $5^\circ$ ). Третий, наиболее реалистичный, сценарий вводит ошибки определения ( $0.5^\circ$  постоянной и нормально распределенной ошибки, аналогично  $0.5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  по угловой скорости), в четвертом и пятом ошибка увеличивается в 2 и 4 раза соответственно.

### 3. Заключение

В докладе показана успешная реализация магнитного управления ориентацией, основанная на скользящем управлении. Управление строится таким образом, чтобы быть реализуемым магнитными катушка-

ми, и позволяет добиться точности ориентации около  $6-10^\circ$  в реальном сценарии моделирования в инерциальных осях и  $6-12^\circ$  в орбитальных осях.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 22-71-10009-П), <https://rscf.ru/project/22-71-10009-П/>.

## **Using Sliding Mode Control With Varying Surface to Overcome Magnetic Attitude Control Local Underactuation Problem**

*D. S. Roldugin, Y. V. Mashtakov*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia  
rolduginds@keldysh.ru, yarmashtakov@keldysh.ru

In this paper, sliding mode control is constructed for three axis magnetic attitude stabilization of a spacecraft. The varying linear sliding surface allows construction of a control that is guaranteed to be perpendicular to the geomagnetic induction vector.

---

## **Устойчивость и динамика реакционно-диффузионной модели распространения вирусной инфекции с учетом влияния температуры тела**

*К. А. Рюмина*

РУДН им. Патриса Лумумбы, Москва, Россия

НИИ медицины труда им. академика Н. Ф. Измерова, Москва, Россия  
ryumina-ka@rudn.ru

В работе представлена математическая модель распространения респираторной вирусной инфекции с учетом влияния температуры. Модель построена на основе системы нелинейных реакционно-диффузионных уравнений с запаздыванием, описывающих пространственно-временное распределение вирусных частиц, инфицированных и неинфицированных клеток. Температура включена как переменная, зависящая от вирусной нагрузки, которая влияет на скорость репликации, коэффициент инфицируемости и скорость деградации вирусных частиц. Проведен анализ стационарных состояний и исследована их устойчивость, выявлен критический параметр (число репликации вируса), определяющий переход между подавлением и развитием инфекции. Получены оценки скорости распространения и полной вирусной нагрузки в зависимости от температуры.

*Ключевые слова:* реакционно-диффузионная система, устойчивость, нелинейная динамика

### **1. Введение**

Математическое моделирование позволяет детально исследовать механизмы распространения вирусной инфекции и оценивать влияние иммунных факторов на динамику заболевания. Одним из важных защитных механизмов организма является повышение температуры тела, оказывающее влияние как на активность иммунной системы, так и на скорость репликации вируса. Математические модели инфекционного процесса с учетом температурных эффектов рассматривались, в частности, в работе [1]. Реакционно-диффузионные модели распространения вирусной инфекции и иммунного ответа исследованы в ряде работ [2, 3].

В настоящей работе предлагается математическая модель распространения вирусной инфекции внутри инфицированной ткани, учитывающая температурную регуляцию организма. Целью работы является исследование динамических режимов системы, анализ устойчивости

стационарных состояний и изучение волновых режимов распространения инфекции.

## 2. Основной результат

Рассматривается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \lambda(U_0 - U) - a(T)UV, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= a(T)UV - \beta I, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b(T)I(t - \tau) - \sigma(T)V, \\ \frac{dT}{dt} &= \alpha_T(T_s(V) - T),\end{aligned}$$

где  $U(x, t)$ ,  $I(x, t)$ ,  $V(x, t)$  — концентрации неинфицированных клеток, инфицированных клеток и вирусных частиц соответственно,  $T(t)$  — локальная температура ткани. Функции  $a(T)$ ,  $b(T)$ ,  $\sigma(T)$  описывают температурную зависимость коэффициентов инфицирования, репликации и деградации вируса.

Температура определяется через интегральную вирусную нагрузку

$$(1) \quad T_s = T_n + \frac{\Delta_T J(V)}{k + J(V)}, \quad J(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} V \, dx.$$

Был получен параметр репликации вируса

$$(2) \quad R = \frac{a_0 b_0 u_0}{\beta \sigma_0}$$

Исследована устойчивость стационарных решений. Установлено, что при  $R < 1$  является устойчивым состояние соответствующее отсутствию инфекции, а при  $R > 1$  возникает стационарное состояние с распространением вирусной нагрузки.

Исследованы решения типа бегущих волн, описывающие распространение инфекции в ткани. Получены нелинейные соотношения, связывающие скорость волны, полную вирусную нагрузку и температурные параметры системы. Показано, что существование волновых решений определяется условием  $R > 1$ , а скорость распространения инфекции зависит от температурных коэффициентов модели.

### 3. Заключение

Построена и исследована нелинейная реакционно-диффузионная модель распространения вирусной инфекции с температурной обратной связью. Получены условия существования стационарных режимов, исследована их устойчивость и изучены волновые режимы распространения инфекции. Показано, что температурные эффекты существенно влияют на динамику инфекционного процесса и могут приводить к подавлению инфекции при определенных параметрах модели.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (Проект № FSSF-2026-0013).

#### Список литературы

1. *Марчук Г.И.* Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases. Moscow: MAIA, 1997.
2. *Ait Mahiout L., Mozokhina A., Tokarev A., Volpert V.* Virus Replication and Competition in a Cell Culture: Application to the SARS-CoV-2 Variants // Applied Mathematics Letters. 2022. V. 133. 108217.
3. *Mozokhina A.S., Ryumina K.A.* Multiscale mathematical model of the spread of respiratory infection considering the immune response // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2024. V. 70. No. 4. P. 654–668.

### Stability and Dynamics of the Reaction-Diffusion Model for the Spread of Viral Infection With the Influence of Body Temperature

*K. A. Ryumina*

RUDN University, Moscow, Russia

Izmerov Research Institute of Occupational Health, Moscow, Russia  
ryumina-ka@rudn.ru

This paper presents a mathematical model of the spread of a respiratory viral infection with the influence of temperature. The model is constructed using a system of nonlinear reaction-diffusion equations with delay describing the spatiotemporal distribution of viral particles and infected and uninfected cells. Temperature is included as a variable dependent on viral load, influencing on the replication rate, infectivity coefficient, and degradation rate of viral particles. A steady-state analysis was conducted, their stability was investigated, and a critical parameter (the viral replication number) was identified that determines the transition between infection suppression and progression. Estimations for the spread rate and total viral load were obtained as a function of temperature.

**Параметризация дискриминантной поверхности одного частного случая интегрируемости динамики твердого тела**

*П. Е. Рябов*

Финансовый университет, Москва, Россия

МФТИ, Долгопрудный, Россия

РТУ МИРЭА, Москва, Россия

peryabov@fa.ru, ryabov.pe@mipt.ru, ryabov\_p@mirea.ru

Для интегрируемого случая Ковалевской–Чаплыгина–Горячева–Яхьи динамики твердого тела получена явная параметризация дискриминантной поверхности алгебраической кривой, определяемой  $L$ - $A$  парой А. В. Цыганова.

**1. Введение**

В аналитической динамике твердого тела интегрируемый случай Ковалевской–Чаплыгина–Горячева–Яхьи описывается в переменных  $M = (M_1, M_2, M_3)$  (кинетический момент) и  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  (компоненты единичного вектора вертикали) системой уравнений:

$$\dot{M} = M \times \frac{\partial H}{\partial M} + \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = \alpha \times \frac{\partial H}{\partial \alpha},$$

где гамильтониан имеет вид:

$$H = \frac{1}{4}(M_1^2 + M_2^2) + \frac{1}{2}(M_3 - \lambda)^2 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + 2c_4\alpha_1\alpha_2 + \delta\frac{\alpha^2}{\alpha_3}.$$

На нулевом уровне интеграла площадей система обладает дополнительным интегралом четвертой степени [1]:

$$(1) \quad F = \left[ \frac{1}{4}(M_1^2 - M_2^2) - c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3^2 - \delta\frac{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_3} \right]^2 + \left[ \frac{1}{2}M_1M_2 - c_1\alpha_2 - c_2\alpha_1 + c_4\alpha_3^2 - 2\delta\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} \right]^2 + 2\lambda(M_3 - 2\lambda) \left[ \frac{1}{4}(M_1^2 + M_2^2) + \left(1 + \frac{\alpha^2}{\alpha_3}\right)\delta \right] - 2\lambda\alpha_3[(c_1 + c_3\alpha_1 + c_4\alpha_2)M_1 + (c_2 - c_3\alpha_2 + c_4\alpha_1)M_2].$$

История вопроса появления дополнительного интеграла (1) кратко изложена в [2]. В работах [3, 4] приведена другая форма дополнительного интеграла  $K$ , который выражается через  $F$  следующим образом:

$$(2) \quad K = F + (\delta + \lambda^2)(2H + \lambda^2) - (\delta - \lambda^2)^2 - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)\alpha^2.$$

С интегралом  $K$  связана спектральная кривая, играющая ключевую роль в представлении Лакса системы [3, 4]:

$$(3) \quad \zeta^2 + d_1\zeta + d_0 = 0,$$

где коэффициенты  $d_1$  и  $d_0$  с учетом (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} d_1 &= z^6 - 4(2h + \lambda^2)z^4 + 32a^2(c_1^2 + c_2^2)(\delta - \lambda^2) \\ &\quad + 16z^2 \left[ f + (\delta + \lambda^2)(2h + \lambda^2) - (\delta - \lambda^2)^2 - \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)a^2 \right], \\ d_0 &= 16 \left[ (c_1^2 + c_2^2)^2 + 2[(c_1^2 - c_2^2)c_3 + 2c_1c_2c_4]z^2 + (c_3^2 + c_4^2)z^4 \right] \\ &\quad \times [(z - 2\lambda)^2 - 4\delta] [(z + 2\lambda)^2 - 4\delta] a^4. \end{aligned}$$

## 2. Основной результат

Дискриминантная поверхность определяется как множество значений параметров  $(f, h, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda, \delta)$ , при которых алгебраическая кривая (3) имеет особые точки. Это условие эквивалентно системе уравнений:  $\mathcal{D}(z) = \mathcal{D}'(z) = 0$ , где  $\mathcal{D}(z) = d_1^2 - 4d_0$  — дискриминант квадратного (по  $\zeta$ ) уравнения кривой (3). Представим дискриминант в виде  $\mathcal{D}(z) = z^2\mathcal{R}(s)$ , введя параметр  $s = -4z^2$ . Поскольку точка  $z_0 = 0$  всегда является особой, основной интерес представляют особые точки, соответствующие кратным корням многочлена  $\mathcal{R}(s)$ . Введем следующие обозначения:

$$(4) \quad \begin{aligned} P &= u^2 + v^2, \quad Q = (s + \delta)^2 + 2(s - \delta)\lambda^2 + \lambda^4, \\ u &= c_1^2 - c_2^2 - 4c_3s, \quad v = 2(c_1c_2 - 2c_4s), \\ w &= a^2(c_1^2 + c_2^2)(s + \delta - \lambda^2) \\ &\quad - 2s[f + s^2 - \delta^2 + (s + 3\delta)\lambda^2 + 2h(s + \delta + \lambda^2)]. \end{aligned}$$

Тогда условие  $\mathcal{R}(s) = 0$  эквивалентно соотношению:

$$(5) \quad w^2 = a^4PQ.$$

Система уравнений  $\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}'(s) = 0$  с учетом (5) позволяет выразить  $f$  и  $h$  через параметр  $s$ , что приводит к явной параметризации дискриминантной поверхности алгебраической кривой (3) в виде:

$$f = Q + a^2 \frac{(c_1^2 + c_2^2) \left[ (s + \delta)^2 - 2s\lambda^2 - \lambda^4 \right]}{2s^2} + \frac{a^4 \left( 4\delta\lambda^2 sP - \left[ (c_1^2 - c_2^2)u + 2c_1c_2v \right] (s + \delta + \lambda^2)Q \right)}{2s^2 w},$$

$$h = -s - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{a^2 (c_1^2 + c_2^2) (\lambda^2 - \delta)}{4s^2} + \frac{a^4 \left( \left[ (c_1^2 - c_2^2)u + 2c_1c_2v \right] Q - s(s + \delta + \lambda^2)P \right)}{4s^2 w},$$

где величины  $P, Q, u, v$  определяются согласно (4), а  $w$  — согласно (5). Полученная параметризация справедлива при условии, когда эллиптическая кривая, заданная уравнением (5), не имеет точек ветвления. Это равносильно отсутствию кратных корней многочлена  $PQ$ , то есть его неприводимости к полному квадрату другого многочлена. Особые случаи возникают при выполнении условий

$$(c_1^2 - c_2^2)c_4 = 2c_1c_2c_3 \quad \text{или} \quad \delta\lambda = 0,$$

либо при их совместном выполнении.

### 3. Заключение

Дискриминантная поверхность алгебраической кривой, соответствующей представлению Лакса, как правило, содержит бифуркационную диаграмму интегрального отображения. Полученная явная параметризация этой поверхности открывает возможность детального исследования фазовой топологии всего интегрируемого семейства Ковалевской–Чаплыгина–Горячева–Яхьи. В частности, она может быть использована для анализа бифуркаций торов Лиувилля в компактном случае и цилиндров в некомпактном.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 25-21-00086), <https://rscf.ru/project/25-21-00086/> в Московском физико-техническом институте (национальном исследовательском университете).

### Список литературы

1. *Yehia H. M.* New Integrable Problems in the Dynamics of Rigid Bodies With the Kovalevskaya Configuration: I. the Case of Axisymmetric Forces // *Mech. Res. Com.* 1996. V. 23. No. 5. P. 423–427.
2. *Yehia H. M.* Comment on “On the Kowalevsky–Goryachev–Chaplygin Gyrostat” // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. V. 35. P. 10669–10670.
3. *Tsiganov A. V.* On the Kowalevski–Goryachev–Chaplygin Gyrostat // *J. Phys. A.* 2002. V. 35. № 22. P. L309–L318.
4. *Цыганов А. В.* Разделение переменных в гиростате Ковалевской–Горячева–Чаплыгина // *ТМФ.* 2003. Т. 135. № 2. С. 240–247.

### Parameterization of the Discriminant Surface for a Particular Integrable Case of Rigid Body Dynamics

*P. E. Ryabov*

Financial University, Moscow, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

peryabov@fa.ru, ryabov.pe@mipt.ru, ryabov\_p@mirea.ru

For the integrable Kovalevskaya–Goryachev–Chaplygin–Yehia case of rigid body dynamics, an explicit parameterization of the discriminant surface of the algebraic curve defined by the  $L$ - $A$  pair of A. V. Tsiganov is obtained.

---

## Анализ устойчивости по приращениям системы успокоения качки при помощи бортовых рулей на малых скоростях

*Н. А. Савин<sup>1,2</sup>, А. В. Проскурников<sup>1</sup>, Е. Б. Амбросовская<sup>1,2</sup>*

АО Навис, Санкт-Петербург, Россия<sup>1</sup>

СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>

n.savin@navis.spb.ru, avp1982@gmail.com, e.ambrosovskaya@navis.spb.ru

Рассматривается нелинейная задача демпфирования качки на малой скорости хода при помощи бортовых рулей. Существенная нелинейность возникает в управляющем моменте за счет сил вязкого трения, а в качестве управления предлагается простой линейный регулятор. В докладе рассматривается вопрос устойчивости представленной системы успокоения бортовой качки, основанной на двух управляемых рулях нулевой скорости, под действием ограниченного волнового возмущения.

*Ключевые слова:* бортовая качка, демпфирование качки, рули нулевой скорости, устойчивость по приращениям

### 1. Введение

Существуют различные средства демпфирования качки судов [1, 2]. Бортовые рули нулевой скорости хода достаточно широко используются в последние годы для демпфирования качки на малых ходах, но имеют существенную нелинейность и эффективны только в случае быстродействующего привода [3, 4]. Работа посвящена анализу устойчивости замкнутой системы при действии возмущений.

### 2. Постановка задачи

Объект управления описывается линейным уравнением:

$$(1) \quad \ddot{\theta} + 2n_{\theta}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = m_u(t) + m_w(t),$$

где  $\theta$  — угол крена;  $n_{\theta}, \omega_0$  — параметры объекта;  $m_u(t)$  — нормированный управляющий момент;  $m_w(t)$  — нормированный возмущающий момент. Управляющий момент имеет существенную нелинейность [3, 4]:

$$(2) \quad m_u(t) \approx h(\dot{\delta}_f),$$

где  $\dot{\delta}_f$  — угловая скорость перекаладки бортового руля;  $h$  — нелинейность бортового руля, обусловленная вязким сопротивлением среды.

Замкнутая система с учетом линейного закона управления и динамики привода может быть переписана в форме Лурье:

$$(3) \quad \begin{aligned} \ddot{\theta} + 2n_{\theta}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta &= h(\dot{\delta}_f) + m_w(t), \\ \dot{\delta}_f(t) &= -c\delta_f(t) - k_p\theta(t) - k_d\dot{\theta}(t). \end{aligned}$$

где  $k_p, k_d, c$  — параметры регулятора.

Требуется исследовать устойчивость замкнутой системы в условиях возмущений. В теории устойчивости известен критерий абсолютной устойчивости Попова. Проблема использования данного критерия напрямую для системы (3) заключается в том, что он справедлив для невозмущенных систем, в то время как судно все время находится под действием различных внешних сил.

Гораздо более значимым свойством для систем, подверженных возмущениям, является то, что было изначально введено Б. П. Демидовичем как «конвергентная динамика» [5] и в современной литературе известно как (экспоненциальная) устойчивость по приращениям [6].

### 3. Основной результат

Рассмотрим устойчивость замкнутой системы с точки зрения теории устойчивости по приращениям. Передаточная функция замкнутой системы от нелинейности  $h$  к угловой скорости переключки  $\dot{\delta}_f$

$$W(s) = -\frac{s}{s+c} \frac{k_d s + k_p}{s^2 + 2n_{\theta}s + \omega_0^2},$$

**Лемма 1.** Пусть замкнутая система гурвицева и выполнено следующее условие в частотной области:

$$\operatorname{Re} W(j\omega) < \frac{1}{k_f} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Тогда система Лурье (3) устойчива по приращениям для любой нелинейной функции  $h$ , удовлетворяющей секторному ограничению:

$$0 \leq \frac{h(\omega_1) - h(\omega_2)}{\omega_1 - \omega_2} \leq k_f,$$

где  $k_f$  — коэффициент угла наклона верхней границы сектора.

Важное следствие Леммы 1: если решение системы (3) непрерывно зависит от возмущения, то существуют константы  $C_1, C_2 > 0$ , что:

$$\|\Delta x(t)\| \leq C_1 e^{-\varepsilon t} \|\Delta x(0)\| + C_2 \sup_{s \in [0, t]} \|\Delta w(s)\|$$

для любых двух траекторий  $x(t)$  и  $\tilde{x}(t)$ , соответствующих возмущениям  $w(t)$  и  $\tilde{w}(t)$ . В частности, если  $h(0) = 0$ , то, подставляя  $\tilde{x} = 0$  и  $\tilde{w} = 0$ :

$$\|x(t)\| \leq C_1 e^{-\varepsilon t} \|x(0)\| + C_2 \sup_{s \in [0, t]} \|w(s)\|.$$

#### 4. Заключение

Рассмотрена задача демпфирования качки при помощи линейного закона управления. Показано, что в данном случае нелинейная система сводится к системе Лурье. На основе теории устойчивости по приращениям записано условие устойчивости замкнутой системы при наличии возмущений.

#### Список литературы

1. Амбросовская Е. Б., Амбросовский В. М. Современные подходы к демпфированию бортовой качки. Морские интеллектуальные технологии. 2023. № 2-1(60). С. 116–122.
2. Perez T., Blanke M. Ship Roll Damping Control // Annual Reviews in Control. V. 36. No. 1. P. 129–147.
3. Zhang S., You P., Zhao P., Liang L., Li R. Experimental Study on the Control Form of Fin Stabilizer at Zero Speed // PLoS One. 14. e0216395.
4. Savin N., Ambrosovskaya E., Romaev D., Proskurnikov A. Assessing Linear Control Strategies for Zero-Speed Fin Roll Damping // IFAC-PapersOnLine. 2025. V. 59. No. 22. P. 776–781.
5. Pavlov A., Pogromsky A., Van de Wouw N., Nijmeijer H. Convergent Dynamics, a Tribute to B. P. Demidovich // Syst. Contr. Lett. 2007. V. 52. P. 257–261.
6. D'Alto L., Corless M. Incremental Quadratic Stability // Numer. Algebra Control Optim. 2103. V. 3. P. 175–201.

#### Incremental Stability Analysis of the Roll Damping System Using Fins Zero Speed

N. A. Savin<sup>1,2</sup>, A. V. Proskurnikov<sup>1</sup>, E. B. Ambrosovskaya<sup>1,2</sup>

JSC Navis, Saint Petersburg, Russia<sup>1</sup>

SPbETU «LETI», Saint Petersburg, Russia<sup>2</sup>

n.savin@navis.spb.ru, avp1982@gmail.com, e.ambrosovskaya@navis.spb.ru

The nonlinear problem of roll damping at low speed using fins is considered. Significant nonlinearity occurs in the control moment due to viscous friction forces, and a simple linear regulator is proposed as a control. The report examines the issue of stability of the presented roll damping

system based on two controlled zero-speed fins under the influence of a limited wave disturbance.

---

УДК 629.7.069:004.048

## **Отказоустойчивость в условиях цифрового моделирования с применением Smart Robot Car Kit v 3.0**

*А. А. Саломатин, А. В. Рожнов*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
sandr@ipu.ru, rozhnov@ipu.ru

Исследуется проблема обеспечения отказоустойчивости автономных робототехнических комплексов при разработке и реализации полуавтономных функций. Обосновывается введение избыточности при многоуровневом описании новых задач цифрового моделирования на основе использования Smart Robot Car Kit для больших массивов данных.

*Ключевые слова:* отказоустойчивость, отказобезопасность, полуавтономные функции, автономные робототехнические комплексы, «артефакты» цифрового моделирования, Smart Robot Car Kit

### **1. Введение**

При использовании сложных сред эмуляции взаимодействия человека-оператора и передовых автономных робототехнических комплексов (РТК) в практике последующей опытной эксплуатации таковых довольно часто возникают ситуации существенного расхождения в их ожидаемом поведении, в том числе при организации группового управления. Одним из наиболее интересных направлений совершенствования инструментария цифрового моделирования подобных сложных систем является обоснованное применение физико-информированных (Physics-informed neural networks, PINNs) искусственных нейронных сетей [1]. Целью исследования является обоснование и разработка интеллектуальных интеграционных компонентов, обеспечивающих реализацию полуавтономных функций при возникновении «артефактов» цифрового моделирования. При этом, неоспоримое значение приобретает свойство отказоустойчивости такой сложной системы, сохранять работоспособность в ожидаемых условиях эксплуатации после отказа

одного или нескольких составных компонентов. Одним из ключевых средств обеспечения отказоустойчивости является введение избыточности, в том числе при многоуровневом описании новых задач цифрового моделирования для больших массивов данных на базе Smart Robot Car Kit.

## 2. Основной результат

В общем виде исследуется свойство отказоустойчивости как существенная составляющая меры эффективности «неокончательных» решений группового управления избыточностью, которые принимаются в некоторый интервал времени. В рассматриваемых случаях подразумевается плавная деградация ресурсов при реализации полуавтономной функции РТК. Основное содержание совокупности задач группового управления включает здесь описание и интерпретацию суррогатных моделей в случаях обнаружения «артефактов» цифрового моделирования при пополнении перечня отказов полуавтономных функций.

Таким образом, требуется сформировать набор локальных моделей многорядной структуры принятия «неокончательных» решений посредством реализации PINNs при коррекции описания и в возникающих нестандартных ситуациях группового управления автономными РТК.

## 3. Особенности применения Smart Robot Car Kit v 3.0

На текущем этапе изучаются вопросы обеспечения отказоустойчивости в условиях цифрового моделирования динамического отбора допустимых траекторий и позиций с использованием формализма фазового объема «трубки решений» посредством Smart Robot Car Kit (3.0):

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p}(t) \in \mathcal{O}(t) \cap \mathcal{F}(t), \quad \forall t \in [0, T], \\
 & \mathcal{F}(t) = \{\mathbf{p} \mid R_{\min}(t) \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| \leq R_{\max}(t)\}, \\
 (1) \quad & \begin{bmatrix} R_{\min}(t) \\ R_{\max}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{N}_{\text{NN}}(\mathbf{s}(t)), \\
 & \frac{d}{dt} \ln(\text{vol}(\mathcal{O}(t))) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{p}, t) + \Psi_{\text{disc}}(t).
 \end{aligned}$$

Здесь функция  $\mathbf{p}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ , текущее положение робота в момент времени  $t \in [0, T]$ , дифференцируема по  $t$ . Вектор  $\mathbf{s}(t) \in$

$\mathbb{R}^m$  обозначает состояние системы. «Трубка решений»  $\mathcal{O}(t)$  — множество состояний, достижимых при сохранении заданного уровня отказоустойчивости. Область  $\mathcal{F}(t)$  обозначает кольцо с центром в точке  $\mathbf{p}_0$ .  $R_{\min}(t)$ ,  $R_{\max}(t)$  определяются через функцию нейронной сети  $\mathcal{N}_{\text{NN}}$ .

Динамика изменения объема «трубки» определяется средней дивергенцией векторного поля скоростей  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  (расширение или сжатие «трубки»), и корректирующим слагаемым  $\Psi_{\text{disc}}(t)$ , выражающим уменьшение объема за счет удаления областей  $\mathcal{O}_k$  в интервалы коррекции  $\Delta t$ .

Требуется обеспечить условие принадлежности текущего положения «трубки решений» в пределах зоны  $\mathcal{F}(t)$  в каждый момент времени  $t$ . В ходе определения эффективности «неокончательных» решений группового управления избыточностью минимизируется функционал:

$$(2) \quad J = \int_0^T \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*(t)\|^2 dt,$$

где  $\mathbf{p}^*(t)$  — искомая траектория внутри области  $\mathcal{O}(t) \cap \mathcal{F}(t)$ .

На рис. 1 представлено сечение «трубки решений» в расширенном фазовом пространстве для фиксированного момента времени  $t = \tau$ .

Таким образом, на секции будет предложен к обсуждению комплексный подход и частные примеры достигаемых результатов цифрового моделирования с пополняемым перечнем выявленных отказов в приоритете отработки отказобезопасности группового управления.

### Список литературы

1. Рожнов А.В., Лобанов И.А. Стратифицированная модель единого информационно-управляющего поля для формализации особенностей переключения режимов управления смешанными группами пилотируемых и беспилотных ЛА / Мат. XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого)». М.: ИПУ РАН, 2016. С. 304–307.

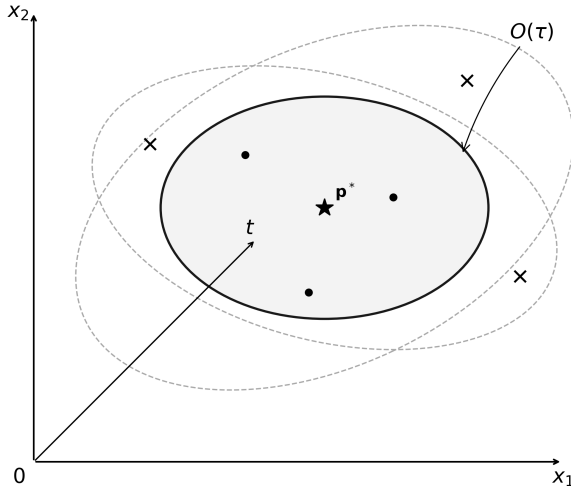


Рис. 1: Вариант сечения «трубки решений» при  $t = \tau$ .  
 Маркерами  $\bullet$  отмечены позиции с малым  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*\|$ ;  
 $\times$  — исключаемые позиции с большим отклонением.  
 Пунктирные эллипсы — границы зоны  $\mathcal{F}(t)$ .

## Fault Tolerance in Digital Simulation Using Smart Robot Car Kit v 3.0

*A. A. Salomatin, A. V. Rozhnov*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences  
 , Moscow, Russia  
 sandr@ipu.ru, rozhnov@ipu.ru

The problem of ensuring fault tolerance of autonomous robotic complexes in the development and implementation of semi-autonomous functions is investigated. The redundancy integration into the multilevel description of new digital modeling tasks based on the use of Smart Robot Car Kit for large amounts of data is being justified.

## Устойчивость режима планирования при прыжке лыжника с трамплина

*В. А. Самсонов, Б. Я. Локшин, Ю. М. Окунев, О. Г. Привалова*

НИИ механики МГУ, Москва, Россия  
 samson@imec.msu.ru, blokshin@imec.msu.ru, privalova@imec.msu.ru

Рассматривается фаза полета лыжника в V-стиле в режиме планирования при прыжке с трамплина. В плоскости двух параметров — угла наклона корпуса лыжника и угла раскрытия лыж — построена область устойчивости этого режима.

*Ключевые слова:* лыжник, трамплин, фаза полета, планирование, V-стиль, устойчивость

### 1. Введение

Прыжок лыжника с трамплина разделяют на четыре фазы: разгон, отталкивание, полет и приземление. Будем рассматривать фазу полета лыжника. Если нет бокового ветра и других возмущений, то движение лыжника происходит в вертикальной плоскости. В работах [1,2] отмечается относительная статичность положения прыгуна в полете. Это позволяет считать позу лыжника в полете неизменной. Ранее рассматривалась простейшая модель прыжка — движение материальной точки [3]. В настоящей работе рассматривается плоскопараллельное движение тела и исследуется его устойчивость, что является необходимой составляющей успешности прыжка.

### 2. Основной результат

Исследуем полет лыжника при прыжке с трамплина в V-стиле, который определяется углом  $\lambda$  раскрытия лыж (рис. 1а) и углом  $\psi$  наклона тела над лыжами (рис. 1б). На рис. 1в представлено распределение сил, действующих на систему лыжник–лыжи. Точкой  $G$  обозначим центр масс этой системы, отрезок  $GC$  жестко связан с системой. На прыгуна в полете действуют сила тяжести  $mg$ , аэродинамические силы: подъемная сила  $L = 0.5\rho s(\lambda) c_l(\alpha, \lambda, \psi) V^2$  и сила лобового сопротивления  $D = 0.5\rho s(\lambda) c_d(\alpha, \lambda, \psi) V^2$ , а также аэродинамический момент  $M = 0.5\rho s(\lambda) r c_m(\alpha, \lambda, \psi) V^2$ .

Здесь  $V$  — скорость точки  $G$ ,  $\rho$  — плотность среды,  $r$  — расстояние от центра тяжести до центра давления,  $s(\lambda)$  — характерная площадь системы,  $c_l(\alpha, \lambda, \psi)$ ,  $c_d(\alpha, \lambda, \psi)$ ,  $c_m(\alpha, \lambda, \psi)$  — соответствующие безразмерные аэродинамические коэффициенты.

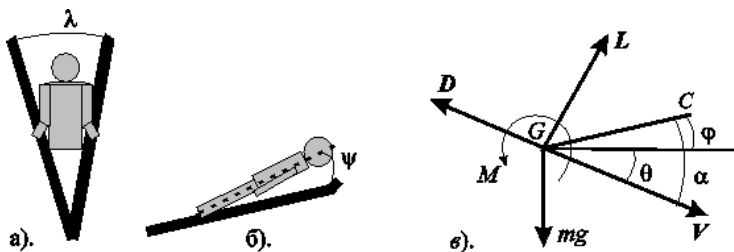


Рис. 1: а) Угол  $\lambda$  раскрытия лыж; б) Угол  $\psi$  наклона тела над лыжами; в) Силы, действующие на систему лыжник–лыжи

Угол  $\alpha$  атаки вводим как угол между вектором скорости точки  $G$  и отрезком  $GC$ . В настоящей работе используются значения аэродинамических коэффициентов, заданных в полиномиальной форме, как функции угла  $\alpha$  и углов  $\psi$  и  $\lambda$ , полученные экспериментально в [4].

Уравнения движения лыжника можно представить в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} m\dot{V} &= -D + mg \sin \theta, \\ mV\dot{\theta} &= -L + mg \cos \theta \\ J\dot{\omega} &= M, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \end{aligned}$$

где  $J$  — момент инерции,  $\theta$  — угол между вектором скорости  $V$  и горизонталью,  $\varphi$  — угол между отрезком  $GC$  и горизонталью, угол  $\alpha = \theta + \varphi$ .

В фазе полета лыжник находится в режиме планирования, на котором  $M(\alpha, \lambda, \psi) = 0$ ,  $\omega = 0$ ,  $V = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ .

Рассмотрим вопрос асимптотической устойчивости этого режима.

Малые колебания системы лыжник–лыжи относительно его положения в рассматриваемом режиме описываются системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами четвертого порядка.

Характеристическое уравнение, отвечающее этой системе, имеет вид  $a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$ . Показано, что  $a_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, 4$ .

Тогда, условия устойчивости сводятся к единственному неравенству

$$-0,25 \frac{V^4}{g^2} \frac{\rho r s(\lambda)}{J} \frac{c'_m(\alpha, \lambda, \psi) \left[ c'_l(\alpha, \lambda, \psi) / 3c_d(\alpha, \lambda, \psi) \right]}{\left[ 1 + c'_l(\alpha, \lambda, \psi) / 3c_d(\alpha, \lambda, \psi) \right]^2} > 1,$$

где  $()' = \partial () / \partial \alpha$ .

На рис. 2 представлена область устойчивости режима планирования на плоскости угла наклона корпуса лыжника и угла раскрытия лыж. Вне границы — устойчивость, внутри — неустойчивость. Видно, что при значениях угла  $\lambda > 10^0$  и значениях угла  $\psi < 15^0$  рассматриваемый режим устойчив.

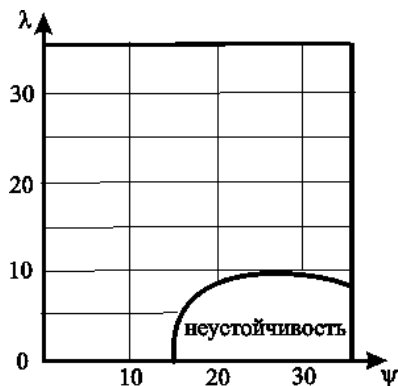


Рис. 2: Область устойчивости режима планирования

### 3. Заключение

Таким образом, в рамках используемой модели аэродинамического воздействия удалось проследить за влиянием параметров полета в V-стиле на устойчивость режима планирования.

#### Список литературы

1. Грозин Е.А. Прыжки с трамплина. М.: Физкультура и спорт, 1971.
2. Koti P.V., Nelson R.S., Pulli M. Biomechanics of Ski-Jumping. Jivaskyla, 1974.
3. Подгаец А.Р., Рудаков Р.Н. Биомеханические проблемы прыжка на лыжах с трамплина // Российский журнал биомеханики. 2000. Т. 4. № 2. С. 20–31.
4. Seo K., Watanabe I., Murakami M. Aerodynamic Force Data for a V-Style Ski Jumping Flight // Sports Engineering. 2004. V. 7. No. 1. P. 31–40.

## Stability of Planning Mode of a Skier during a Ski Jump

V. A. Samsonov, B. Ya. Lokshin, Yu. M. Okunev, O. G. Privalova

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
samson@imec.msu.ru, blokshin@imec.msu.ru, privalova@imec.msu.ru

The stability region of planning mode is constructed on the plane of the parameters: the angle of inclination of the skier's body and the angle of opening of the skis during the V-style ski jump.

---

УДК 517.929.4:517.925.51

### Исследование устойчивости нелинейных систем с запаздыванием методом декомпозиции

Н. О. Седова<sup>1</sup>, О. В. Дружинина<sup>2</sup>

УлГУ, Ульяновск, Россия<sup>1</sup>

ФИЦ ИУ РАН; ИПУ РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>

sedovano@ulsu.ru, ovdruzh@mail.ru

Для нелинейных неавтономных систем с запаздыванием специальной структуры исследуются возможности метода декомпозиции. Изучены условия, при которых определенные свойства устойчивости упрощенных систем меньшей размерности достаточны для обоснования желаемого поведения исходной системы. Описаны некоторые виды возмущений, не нарушающие желаемые свойства. Рассмотрены задачи об обеспечении устойчивости, асимптотической устойчивости и устойчивости по выходу.

*Ключевые слова:* нелинейная система, неавтономная система, запаздывание, устойчивость, декомпозиция, возмущения, каскадная система

При исследовании качественных свойств нелинейных систем универсальным методом является построение функции (или функционала) Ляпунова с подходящими свойствами. С увеличением размерности системы и усложнением ее структуры трудности построения такой функции значительно возрастают. В подобных случаях эффективным инструментом может оказаться метод декомпозиции системы. Идея этого метода заключается в разделении рассматриваемой системы на несколько более простых систем меньшей размерности и изучении их

свойств по отдельности как изолированных. Выводы о свойствах исходной системы на основании полученных результатов для изолированных подсистем требуют обоснования и остаются предметом многочисленных исследований (см., например, недавние статьи [1–3] и ссылки в них). Широкое применение находит метод декомпозиции в анализе свойств и решении задач управления для механических систем [4, 5].

В работе исследуются свойства устойчивости нелинейных систем с запаздыванием, описываемых парой уравнений:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f_1(t, x_t) + g(t, x_t, y_t) + p_1(t, x_t, y_t),$$

$$(2) \quad \dot{y}(t) = f_2(t, y_t) + p_2(t, x_t, y_t),$$

где  $t \in R^+ = [0, +\infty)$ ,  $x$  и  $y$  — векторы размерностей  $n$  и  $m$ , соответственно;  $x_t$  — элемент функционального пространства  $C(n) = C([-r, 0], R^n)$ , определяемый формулой  $x_t(s) = x(t + s)$  для  $s \in [-r, 0]$ ,  $r > 0$  — величина запаздывания,  $y_t$  — элемент пространства  $C(m)$ . Предполагается, что правые части уравнений (1), (2) удовлетворяют условиям типа Каратеодори,  $p_i$  — исчезающие в среднем или интегрально исчезающие возмущения [6]. Будем также считать, что  $f_2(t, 0) = 0$ ,  $f_1(t, 0) = 0$ ,  $g(t, \varphi_1, 0) = 0$  для всех  $t \in R^+$ ,  $\varphi_1 \in C(n)$ , так что невозмущенная система (1), (2) имеет нулевое положение равновесия, а невозмущенное уравнение (1) при отсутствии взаимосвязи принимает вид

$$(3) \quad \dot{x}(t) = f_1(t, x_t).$$

Кроме того, рассматривается соответствующее (2) невозмущенное уравнение:

$$(4) \quad \dot{y}(t) = f_2(t, y_t).$$

Системы вида (1), (2) возникают в задачах управления, в том числе механическими системами. При  $p_1(\cdot) = p_2(\cdot) \equiv 0$  система имеет так называемую каскадную структуру, свойствам которой посвящены обширные исследования.

В настоящей работе получены результаты о связи свойств устойчивости уравнений (3), (4) со свойствами системы (1), (2). Чтобы гарантировать «наследование» того или иного свойства даже невозмущенной системой, приходится накладывать дополнительные ограничения; например, в общем случае глобальная равномерная асимптотическая

устойчивость каждого из уравнений (3), (4) не гарантирует аналогичного свойства для связанной системы; то же самое касается свойства равномерной устойчивости. Для обоснования необходимого свойства исходной системы в известных результатах требуются дополнительные условия относительно поведения слагаемого  $g(\cdot)$ , отвечающего за взаимосвязь подсистем, а также усиленные (по сравнению с требуемым для системы) свойства устойчивости изолированных подсистем; при этом такие условия формулируются, как правило, в терминах функций или функционалов Ляпунова (см., например, статьи [3, 7] и ссылки в них). Интерес для системы (1), (2) представляет также задача об устойчивости по выходу, например, когда уравнение (2) описывает динамику регулятора. Для систем с запаздыванием подобные исследования немногочисленны и в основном касаются частных классов систем.

В работе анализируются известные решения рассматриваемой задачи, а также получены новые результаты, расширяющие возможности метода декомпозиции для системы вида (1), (2). В частности, изучен вопрос о поведении решений системы в случае, когда для уравнения (4) гарантируется лишь равномерная устойчивость или равномерная ограниченность решений (известные условия даже неасимптотической устойчивости связанной системы предполагают достаточно жесткие требования сходимости для системы (4)).

### Список литературы

1. *Li S., Zhou B., Duan G.* Semi-Global Stabilization of a Class of Cascade Systems by a Separate Design Approach // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2025. V. 35. No. 9. P. 3678–3690.
2. *Yu J. et al.* Adaptive Prescribed-Time Control for Nonlinear Cascade Systems With FxT-ISS Inverse Dynamics // Automatica. 2025. V. 182. 112527.
3. *Sedova N., Druzhinina O.* Asymptotic Stability of Time-Varying Nonlinear Cascade Systems With Delay via Lyapunov–Razumikhin Approach // Mathematics. 2026. V. 14. No. 3. 576.
4. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Анализ устойчивости механических систем с существенно нелинейными позиционными силами при наличии распределенного запаздывания // АиТ. 2023. № 1. С. 3–22.
5. *Akbarian M., Pariz N.* Innovative and Relaxed Conditions to Global Stabilization of Cascade Nonlinear Systems in Backstepping Framework // International Journal of robust and nonlinear control. 2025.
6. *Седова Н. О.* К вопросу о принципе сведения для нелинейных систем с запаздыванием // АиТ. 2011. № 9. С. 74–86.
7. *Göksu G., Chaillet A.* Integral Input-to-State Stable Time-Delay Systems in Cascade // Automatica. 2022. V. 139. 110175.

# Stability Analysis of Nonlinear Delay Systems Using Decomposition

*N. O. Sedova*<sup>1</sup>, *O. V. Druzhinina*<sup>2</sup>

Ulyanovsk State University (ULSU), Ulyanovsk, Russia<sup>1</sup>

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences; V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia<sup>2</sup>

sedovano@ulsu.ru, ovdruzh@mail.ru

The possibilities of the decomposition method are investigated for nonlinear nonautonomous delay systems of special structure. Conditions are studied under which certain stability properties of simplified lower-dimensional systems are sufficient to justify the desired behavior of the original system. Some types of perturbations that do not violate the desired properties are described. Problems of ensuring stability, asymptotic stability, and output stability are considered.

---

УДК 517.97

## **Устойчивость по Хайерсу–Уламу дифференциальных уравнений дробного порядка с производной Капуто и разрывными траекториями**

*А. Н. Сесекин, А. Д. Кандрина*

УрФУ; ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
a.n.sesekin@urfu.ru, anna.kandrina@urfu.ru

Для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с производной Капуто и разрывными траекториями формализовано понятие решения дифференциального уравнения, дано определение понятия устойчивости по Хайерсу–Уламу. Доказано наличие этого свойства для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с производной Капуто.

*Ключевые слова:* Дифференциальное уравнение, дробная производная Капуто, устойчивость по Хайерсу–Уламу.

## 1. Введение

Формализация понятия устойчивости по Хайерсу–Уламу была сначала сделана для функциональных уравнений, а затем и для дифференциальных уравнений. Постановку задачи и обзор результатов по устойчивости по Хайерсу–Уламу для обыкновенных дифференциальных уравнений приведена в [1]. Для дифференциальных уравнений с разрывными траекториями вопросы об Улам-устойчивости рассматривались с частности в [2]. О формализации дифференциальных уравнений с дробными производными см. [3]. Дифференциальные уравнения с дробными производными в формализации систем с импульсным воздействием А.М. Самойленко и Н.А. Перестюка рассматривались в частности в [4].

## 2. Определение решения уравнения

Рассмотрим следующее уравнение с производной Капуто [3]:

$$(1) \quad ({}^C D_{a+}^\alpha x)(t) = A(t)x(t) + B({}^C D_{a+}^\alpha v)(t), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = x_0.$$

Здесь  $x(t)$ ,  $v(t)$  — скалярные функции. Параметр  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $A(t)$  — непрерывная функция,  $B$  — постоянная. Если функция  $v(t)$  является функцией ограниченной вариации, то требуется провести формализацию понятия решения уравнения (1). Пусть  $v(t)$  — функция ограниченной вариации (для определенности будем полагать, что  $v(a) = 0$ ). Тогда требуется провести формализацию понятия решения уравнения (1). Перепишем уравнение (1) в виде

$$(2) \quad ({}^C D_{a+}^\alpha g)(t) = A(t)(g(t) + Bv(t)), \quad g(a) = x_0,$$

где

$$(3) \quad g(t) = x(t) - Bv(t).$$

Согласно [3] уравнение (2) имеет непрерывное решение и его можно представить в виде

$$(4) \quad g(t) = x(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{A(\tau)(g(\tau) - v(\tau))}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad t \in [a, b].$$

Учитывая замену (3) уравнение (4) запишем следующим образом

$$(5) \quad x(t) = x(a) + Bv(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{A(\tau)x(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad t \in [a, b].$$

Будем полагать, что функции ограниченной вариации  $v(t)$  удовлетворяют условию  $\text{var}_{[a,b]} v(\cdot) \leq M$ . Пусть выполняется неравенство  $|A(t)| \leq Q$ . Тогда из (5) подставляя в него эти последовательности и вычисляя модули левой и правой частей с учетом сделанных предположений на  $v(t)$  и  $A(t)$ , получим неравенство

$$(6) \quad |x(t)| \leq |x(a)| + BM + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{Q|x(\tau)|}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad t \in [a, b].$$

Применяя к последнему неравенству неравенство Henry–Gronwall (см. [3], лемма 6.19), получим оценку

$$|x(t)| \leq (|x(a)| + BM)E_\alpha(Qt^\alpha).$$

Здесь  $E_\alpha$  — функция Миттаг–Лефлера. Следовательно множество решений  $|x(t)|$  равномерно ограничено.

### 3. Устойчивость по Хайерсу–Уламу

**Определение 1.** Будем говорить, что дифференциальное уравнение (1) устойчиво по Хайерсу–Уламу на  $[a, b]$ , если для любой вектор-функции  $y \in BV[t_0, \vartheta]$ , удовлетворяющей неравенству

$$(7) \quad |y(t) - y(a) - Bv(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{A(\tau)y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau| \leq \varepsilon, \quad t \in [a, b]$$

для любого  $\varepsilon > 0$  и любого решения неравенства (6) существует положительное вещественное число  $c_{f,\varphi}$  и решение уравнения (4)  $x(t)$ , удовлетворяющие неравенству

$$|y(t) - x(t)| < c_f \varepsilon$$

для любого  $t \in [t_0, \vartheta]$ .

**Теорема 1.** Пусть существует решение уравнения (4). Тогда дифференциальное уравнение (1) устойчиво по Хайерсу–Уламу.

### Список литературы

1. Rus I.A. Ulam stability of ordinary differential equations // Studia Univ. “BABES–BOLYAI”, Mathematica. 2009. V. LIV. No. 4. P. 125–133.
2. Сесекин А.Н., Кандрина А.Д., Гредасова Н.В. Устойчивость по Хайерсу–Уламу–Рассиасу линейных систем с обобщенным воздействием и запаздыванием // Известия ВУЗов. Математика. 2024. № 12. С. 71–84.

3. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer, 2010.
4. *Wong J, Feckan M, Zhou Y.* A Survey on Impulsive Fractional Differential Equations // *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2016. V. 19. No. 4. P. 806–831.

## **Hyers–Ulam Stability of Fractional Differential Equations With Caputo Derivative and Discontinuous Trajectories**

*A. N. Seseikin, A. D. Kandrina*

UrFU; IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia  
a.n.seseikin@utfu.ru, petrov@ghk.lmn

For a linear fractional differential equation with a Caputo derivative and discontinuous trajectories, we formalized the concept of a solution to a differential equation and followed the definition of Hyers–Ulam stability. This property is proven for a linear fractional differential equation with a Caputo derivative.

---

УДК 519.71

### **Управление методом обратной связи для системы БПЛА в гироскопическом стенде**

*Л. А. Славеснов*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
leonidslavesnov145@gmail.com

Рассматривается задача управления углом крена беспилотного летательного аппарата, установленного на гироскопическом стенде. На основе нелинейной модели вращательного движения выполнена линеаризация и синтезирован программный закон управления с использованием метода обратной связи с линейной номинальной моделью. Результаты численного моделирования подтверждают, что введение обратной связи обеспечивает снижение ошибки слежения и улучшение динамических характеристик системы по сравнению с управлением без обратной связи.

*Ключевые слова:* гироскопический стенд, квадрокоптер, программное управление, математическое моделирование

## 1. Введение

Управление ориентацией беспилотных летательных аппаратов является одной из ключевых задач, определяющих точность и устойчивость их движения. При наличии нелинейностей и неопределенностей в динамике объекта классические линейные методы управления могут приводить к снижению качества слежения. В данной работе рассматривается задача управления углом крена квадрокоптера, установленного на гироскопическом стенде, с использованием метода обратной связи с линейной номинальной моделью. Целью работы является разработка и исследование программного закона управления, обеспечивающего улучшение точности слежения по углу крена.

## 2. Основной результат

В работе используется нелинейная модель вращательного движения системы «гироскопический стенд – БПЛА», записанная в углах Эйлера:

$$(1) \quad \begin{cases} \ddot{\alpha} = \frac{M_{bx} + 0.3 \sin \alpha \cos \beta - 2\mu \dot{\alpha}}{0.02}, \\ \ddot{\beta} = \frac{M_{by} \cos \alpha - M_{bz} \sin \alpha + 0.3 \cos \alpha \sin \beta - 2\mu \dot{\beta}}{0.344 + 0.028 \cos^2 \alpha + 0.018 \sin^2 \alpha}, \\ \ddot{\gamma} = \frac{M_{by} \sin \alpha \cos \beta + M_{bz} \cos \alpha \cos \beta - 2\mu \dot{\gamma}}{0.76 + 0.326 \cos^2 \beta + (0.026 \sin^2 \alpha + 0.02 \cos^2 \alpha) \cos^2 \beta}. \end{cases}$$

Далее рассматривается только первое уравнение системы (1), описывающее динамику угла крена  $\alpha$ . Управляющим воздействием является момент  $M_{bx}$ , а коэффициент  $\mu$  характеризует вязкое трение в подшипниках стенда. Движение по углам тангажа и рыскания предполагается зафиксированным вблизи нулевых значений и не учитывается.

Для синтеза управления модель линеаризуется в окрестности положения  $\alpha = 0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$ . В рамках метода обратной связи с линейной номинальной моделью управляющее воздействие для эталонной динамики принимается в виде [1]:

$$\hat{u} = 2\mu \dot{\alpha},$$

где  $\hat{u} = M_{bx}$  — выход линейной номинальной модели.

Программное управление формируется на основе заданной траектории угла крена  $\alpha_{\text{des}}(t)$  и ее производной  $\dot{\alpha}_{\text{des}}(t)$ :

$$u(t) = K \left( \dot{\alpha}_{\text{des}}(t) + a(\alpha(t) - \alpha_{\text{des}}(t)) \right),$$

где  $K = 2\mu$ , а коэффициент обратной связи по углу выбран равным  $a = -0.3$ .

Результаты численного моделирования показывают, что использование обратной связи с линейной номинальной моделью существенно снижает ошибку слежения по сравнению с системой без обратной связи (рис. 1).

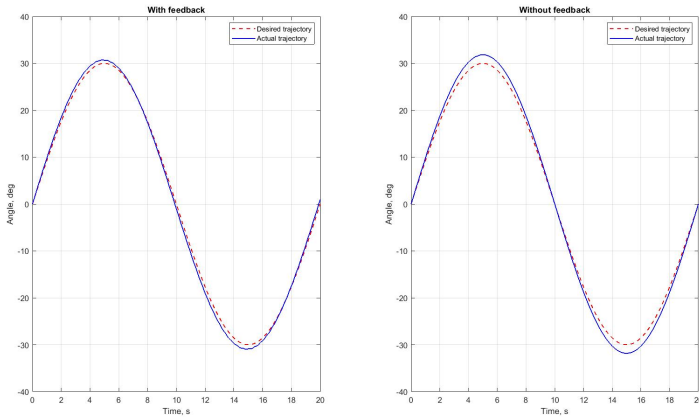


Рис. 1: Сравнение ошибки слежения по углу крена для систем с обратной связью и без нее

### 3. Заключение

В работе разработан алгоритм управления углом крена БПЛА, основанный на методе обратной связи с линейной номинальной моделью. На основе нелинейной модели вращательного движения была выполнена линеаризация и синтезировано программное управление. Результаты численного моделирования показали, что введение обратной связи обеспечивает снижение ошибки слежения и улучшение динамических характеристик системы по сравнению с моделью без обратной связи.

### Список литературы

1. *Ряхимов Р.Р., Николаев М.А.* К вопросу о стабилизации системы стенд-квадрокоптер с помощью ковариационного регулятора // Управление большими системами. 2025. № 1. С. 78–87.

### UAV Roll Angle Control in a Gyroscopic Stand Using Feedback With a Linear Nominal Model

*L. A. Slavesnov*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
leonidslavesnov145@gmail.com

This paper addresses the problem of roll angle control of an unmanned aerial vehicle mounted on a gyroscopic test bench. A nonlinear rotational dynamics model is considered, and a linear nominal model is introduced via local linearization. Based on this model, a trajectory-tracking control law with feedback is synthesized. Numerical simulations demonstrate that the use of feedback with a linear nominal model significantly reduces the tracking error and improves the dynamic performance of the system compared to control without feedback.

---

**Робастное оптимальное слежение для дискретного  
минимально-фазового объекта с неизвестными параметрами  
и неизвестными границами смещенного внешнего  
возмущения и помехи измерений**

*В. Ф. Соколов*

Коми НЦ УрО РАН, Сыктывкар, Россия  
sokolov@ipm.komisc.ru

Рассмотрена задача оптимального слежения для дискретного минимально-фазового объекта с неизвестными и неидентифицируемыми параметрами объекта и неизвестными границами возмущений. Решение основано на оптимальном множественном оценивании неизвестных параметров с использованием показателя качества задачи слежения как идентификационного критерия.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, ограниченные возмущения, робастное управление, множественное оценивание, неидентифицируемость.

### 1. Введение

Для систем с неизвестными параметрами и ограниченными внешними возмущениями хорошо исследованы задачи адаптивной стабилизации. В задачах идентификации таких систем, без применений к задачам управления, рассматривались различные алгоритмы вычисления множественных оценок неизвестных параметров, согласованных с данными измерений. В данной работе задача управления рассмотрена в оптимальной постановке. Ключом к решению оптимальной задачи служат множественное оценивание и использование показателя качества задачи управления как идентификационного критерия [1, 2], что позволяет реализовать максимальные возможности обратной связи [3].

### 2. Постановка задачи

Объект управления с дискретным временем  $t$  описывается моделью

$$(1) \quad a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}, \quad z_t = y_t + d_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $y_t \in \mathbb{R}$  — неизмеряемый выход объекта в момент времени  $t$ ,  $z_t \in \mathbb{R}$  — измеряемый выход,  $u_t \in \mathbb{R}$  — управление,  $v_t \in \mathbb{R}$  — неизвестное внешнее возмущение,  $d_t \in \mathbb{R}$  — неизвестная помеха измерений,  $a$  и  $b$  — полиномы от оператора сдвига назад ( $q^{-1}y_t = y_{t-1}$ ),

$$a(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}, \quad b(q^{-1}) = b_1 + b_2q^{-1} + \dots + b_mq^{-m+1}.$$

Начальные значения  $y_0, \dots, y_{1-n}$  произвольные,  $u_t = 0$  при  $t < 0$ .

*Априорная информация (предположения):*

**АП1.** Неизвестный вектор параметров  $\xi = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$  принадлежит известному замкнутому ограниченному многограннику  $\Xi$ , заданному системой линейных неравенств, корни  $b$  по модулю больше 1 для всех  $\xi \in \Xi$ .

**АП2.** Неизвестные возмущения  $v_t$  и  $d_t$  имеют вид

$$v_t = c^v + \delta^w w_t, \quad \sup_t |w_t| \leq 1, \quad d_t = \delta^m m_t, \quad \sup_t |m_t| \leq 1.$$

где  $c^v$  и  $\delta^w \geq 0$  — неизвестные смещение и норма внешнего возмущения  $v$ ,  $\delta^m \geq 0$  — неизвестная норма помехи измерений  $d$ .

**Задача.** Требуется построить обратную связь (регулятор), минимизирующую (с заданной точностью) наихудшую асимптотическую ошибку отслеживания заданного ограниченного сигнала  $r$  в классе  $D$  описанных в **АП2** возмущений  $(v, d) \in D$ :

$$J(\xi, c^v, \delta^w, \delta^m) = \min_u \sup_{(v,d) \in D} \limsup_{t \rightarrow +\infty} |z_t - r_t|.$$

Сложность поставленной задачи заключается в *неидентифицируемости* набора параметров  $(\xi, c^v, \delta^w, \delta^m)$ .

### 3. Решение задачи на основе оптимальной квантификации возмущений

При известных векторе  $\xi$  и смещении  $c^v$  регулятор

$$b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)qz_t - c^v + r_{t+1}$$

гарантирует равенство  $z_{t+1} - r_{t+1} = \delta^w w_{t+1} + \delta^m a(q^{-1})m_{t+1}$  и является оптимальным в силу произвольности и непредсказуемости нормированных возмущений  $w$  и  $m$ . При этом

$$J(\xi, c^v, \delta^w, \delta^m) = |\delta^w| + \|a\|\delta^m, \quad \|a\| := 1 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Решение поставленной задачи базируется на оптимальной квантификации неизвестного модифицированного вектора параметров

$$\theta = (\xi, c^v, \delta^e), \quad \delta^e = \delta^w + \|a\|\delta^m.$$

*Алгоритм оптимального слежения.* После подачи управления  $u_t$  и измерения выхода  $z_{t+1}$  новая информация о неизвестном векторе  $\theta$  в момент  $t + 1$  имеет вид неравенства

$$(2) \quad |a(q^{-1})z_{t+1} - b(q^{-1})u_t - c^v| \leq \delta^e.$$

Пусть  $\Theta_t$  — полиэдральная оценка вектора  $\theta$ , и  $\theta_t \in \Theta_t$  — векторная оценка неизвестного  $\theta$  в момент  $t$ . Вычислив оптимальное управление  $u_t$ , соответствующее оценке  $\theta_t$ , и измерив выход  $z_{t+1}$ , проверяем неравенство (2) для оценки  $\theta_t$ . Если неравенство выполнено, полагаем  $\Theta_{t+1} = \Theta_t$  и  $\theta_{t+1} = \theta_t$ . Если одно из двух линейных неравенств, задающих (2) и ослабленных специальным дополнительным слагаемым, пропорциональным малому параметру точности  $\varepsilon > 0$ , нарушено, новое нарушенное не ослабленное неравенство добавляется к списку неравенств  $\Theta_t$ , задавая новую множественную оценку  $\Theta_{t+1}$ . Новой оценкой  $\theta_{t+1}$  служит точка минимума показателя качества  $J(\theta)$  на обновленной полиэдральной оценке  $\Theta_{t+1}$ . Описанное выше дополнительное слагаемое гарантирует сходимость оценок  $\Theta_t$  и  $\theta_t$  за конечное время, оптимальность системы с желаемой точностью и, дополнительно, робастность построенного оптимального управления к малым операторным возмущениям в объекте [1].

#### Список литературы

1. *Соколов В.Ф.* Задачи адаптивного оптимального управления дискретными системами с ограниченным возмущением и линейными показателями качества // *АиТ.* 2018. № 6. С. 155–171.
2. *Sokolov V.F.* Model Evaluation for Robust Tracking Under Unknown Upper Bounds on Perturbations and Measurement Noise // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2014. V. 59. No. 2. P. 483–488.
3. *Guo L.* Feedback and Uncertainty: Some Basic Problems and Results // *Annual Reviews in Control.* 2020. V. 49 P. 27–36.

### Optimal Tracking for Discrete Time Minimum-Phase Plant under Unknown Parameters, Bounded Disturbance and Measurement Noise.

*V. F. Sokolov*

Komi Science Center of UB RAS, Syktyvkar, Russia  
sokolov@ipm.komisc.ru

This paper addresses a problem of optimal tracking for a discrete time minimum-phase plant under unknown and non-identifiable parameters of the plant and unknown bounds of external disturbance and measurement noise. The solution is based on optimal set-membership estimation of the unknown parameters with the use of the control performance index as an identification criterion.

## Применение цепных дробей в задаче адаптивного управления с идентификацией для нелинейных теплообменных процессов

*С. В. Солодуша*

ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия  
solodusha@isem.irk.ru

Ключевым предположением при разработке алгоритмов идентификации и адаптивного управления в данной работе является наличие модели типа «вход-выход». Предложен некоторый способ моделирования нелинейной динамики, основанный в идейном плане на комбинации конечного отрезка функционального ряда (полинома) Вольтерра  $N$ -й степени и аппарата цепных дробей.

*Ключевые слова:* нелинейная динамическая система, интегральная модель, полиномы Вольтерра, цепные дроби

### 1. Введение

В условиях априорной неопределенности проблемы идентификации рассматриваются в контексте практических задач, содержащих, как правило, трудно формализуемые условия и высокие требования к точности управления (прогнозирования) [1]. Современные научные подходы к разработке эффективных процедур математического моделирования учитывают тип априорной информации и охватывают онлайн и оффлайн методы оценки неизвестных характеристик изучаемого динамического процесса [2].

В работе исследуется задача восстановления входного сигнала  $x(t)$ , обеспечивающего заданный (желаемый) отклик  $y(t)$  нелинейного объекта, описываемого полиномом Вольтерра

$$(1) \quad y(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T],$$

идентификация переходных характеристик  $K_n$  в котором реализована заранее по набору данных типа «вход-выход» в ходе спланированного эксперимента с использованием специальных тестовых воздействий [3]. Такой подход требует согласования амплитуды (высоты) действующего управляющего воздействия с параметрами входных сигналов, используемых при решении задач оффлайн идентификации [4].

## 2. Основной результат

К основному результату работы относится новый алгоритм онлайн идентификации, который развивает описанный в [4] подход к восстановлению  $x(t)$  при условии наличия обратной связи по выходу  $y(t)$ . Предложена модификация (1), линейная составляющая которой

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = f_1(t)$$

может быть представлена в эквивалентном виде

$$(2) \quad f_1(t) = \alpha \left( \frac{1}{1 - \frac{f_1(t)}{\alpha + f_1(t)}} - 1 \right),$$

где неизвестный параметр  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha + f_1(t) \neq 0$  для всех  $t \in [0, T]$ . Отметим, что дробь в правой части (2) получена на основании известного соотношения [5, формулы (1.2), (1.3)]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{t_1 f_1(t)}{1 - \frac{t_2 f_1(t)}{1 - \dots}}} &= \frac{1}{1 - t_1 f_1(t) - \frac{t_1 t_2 (f_1(t))^2}{1 - (t_2 + t_3) f_1(t) - \frac{t_3 t_4 (f_1(t))^2}{1 - (t_4 + t_5) f_1(t) - \dots}}} = \\ &= 1 + \frac{t_1 f_1(t)}{1 - (t_1 + t_2) f_1(t) - \frac{t_2 t_3 (f_1(t))^2}{1 - (t_3 + t_4) f_1(t) - \frac{t_4 t_5 (f_1(t))^2}{1 - \dots}}}, \end{aligned}$$

константы  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , в котором выбраны так:  $t_1 = \frac{1}{\alpha}$ ,  $t_2 = -\frac{1}{\alpha}$ ,  $t_i = 0$  для  $i > 2$ .

Окончательно, вместо (1) используется модель

$$(3) \quad \begin{aligned} y(t) &= \frac{\alpha}{1 - \frac{\int_0^t (K_1(t, s) + \delta)x(s)ds}{\alpha + \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds}} - \alpha + \\ &+ \sum_{n=2}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \end{aligned}$$

где  $\delta$  — некоторая погрешность. Выбор значения  $\alpha$  существенно влияет на точность оценивания отклика  $y(t)$  при произвольном значении  $\delta$ .

### 3. Заключение

Применительно к задаче автоматического управления нелинейным процессом в элементе теплообменного аппарата [3] рассмотрены оптимизационные задачи выбора параметра  $\alpha$  для построения модели вида (3) при фиксированных значениях  $\delta$  и  $N = 2, 3$ .

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Проект FWEU-2026-0015).

#### Список литературы

1. *Прангишвили И.В., Лотоцкий В.А., Гинсберг К.С., Смолянинов В.В.* Идентификация систем и задачи управления: на пути к современным системным методологиям // Проблемы управления. 2004. № 4. С. 2–15.
2. *Глуценко А.И., Ласточкин К.А.* Асимптотическая онлайн идентификация параметров линейных систем в замкнутом контуре при действии возмущений // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 648–652.
3. *Апарцин А.С., Солодуша С.В., Таиров Э.А.* Математические модели нелинейной динамики на базе рядов Вольтерра и их приложения // Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 1997. Т. 1. № 2. С. 115–125.
4. *Солодуша С.В.* Моделирование систем автоматического управления на основе полиномов Вольтерра // Модел. и анализ информ. систем. 2012. Т. 19. № 1. С. 60–68.
5. *Bao-Xuan Zhu* Stieltjes Moment Properties and Continued Fractions from Combinatorial Triangles // Advances in Applied Mathematics. 2021. V. 130. No. 4. P. 102232.

### Application of Continued Fractions in the Problem of Adaptive Control with Identification for Nonlinear Heat Exchange Processes

*S. V. Solodusha*

Melentiev Energy Systems Institute of SB RAS, Irkutsk, Russia  
solodusha@isem.irk.ru

The key assumption in developing identification and adaptive control algorithms in this paper is the existence of an input–output model. A certain method for modeling nonlinear dynamics is proposed, conceptually based on a combination of a finite segment (polynomial) of Volterra functional series of degree  $N$  and continued fractions tool.

**Управление космическим роботом при сближении, стыковке и обслуживании геостационарного спутника**

*Е. И. Сомов, С. Е. Сомов, С. А. Бутырин,  
Т. Е. Сомова, П. К. Кузнецов*

СамГТУ, Самара, Россия

e\_somov@mail.ru, s\_somov@mail.ru, butyrinsa@mail.ru,  
te\_somova@mail.ru, kurnesov@mail.ru

Приводятся разработанные методы управления космическим роботом-манипулятором на геостационарной орбите и результаты, полученные с помощью компьютерного моделирования.

*Ключевые слова:* космический робот, управление, геостационарный спутник, сближение, стыковка, обслуживание

*Светлой памяти В.Ю. Рутковского, С.Д. Землякова, В.М. Суханова и В.М. Глумова, наших коллег из ИПУ РАН, посвящается.*

**1. Введение**

Для геостационарных спутников связи (ГСС) предусмотрено их обслуживание [1] космическими роботами-манипуляторами (КРМ). Рассматриваются вопросы управления КРМ при выводе на геостационарную орбиту (ГСО), рис. 1, сближении, стыковке и обслуживании [2].

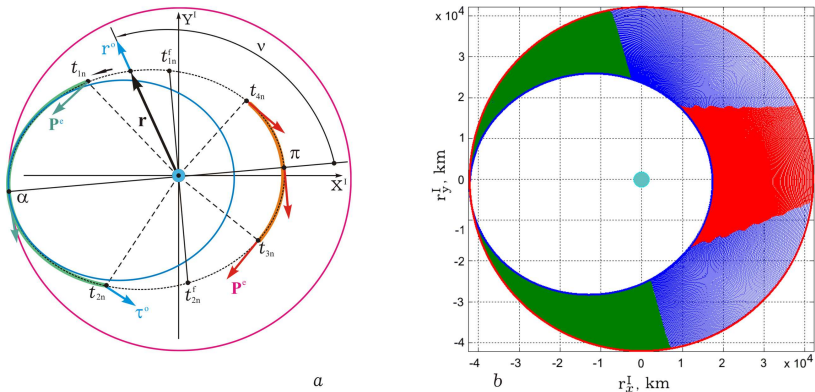


Рис. 1: Стратегия (a) и траектории (b) вывода КРМ на ГСО

## 2. Вывод КРМ на ГСО, сближение и инспекция ГСС

Стратегия запуска КРМ на ГСО по комбинированной схеме, сближения с ГСС и инспекции его состояния содержит такие этапы: 1) перемещение КРМ на геопереходной орбите с повышением высоты ее перигея; 2) до-выведение КРМ на ГСО с помощью плазменной электрореактивной двигательной установки (ЭДУ) и силового гироскопического кластера (СГК) для перехода КРМ на ГСО с точностью около 58 км; 3) сближение КРМ с ГСС до 500 м и затем до 50 м, рис. 2; 4) стабили-

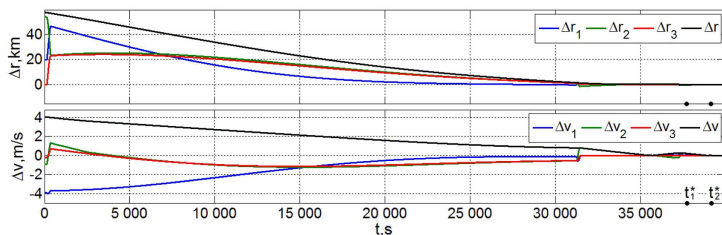


Рис. 2: Разности положений и скоростей ГСС и КРМ

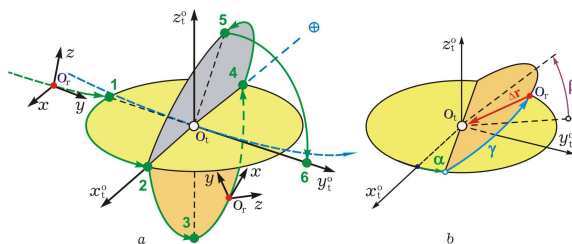


Рис. 3: Схема перелетов КРМ при осмотре состояния ГСС

зация КРМ при ЭДУ на основе 8 каталитических электрореактивных двигателей (ЭРД) с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ) их тяги; 5) инспекция состояния ГСС из 6 точек наблюдения, рис. 3. Здесь используется прогнозирование влияния возмущений из-за гравитационных полей Земли, Солнца, Луны и сил солнечного давления. Прогноз выполняется на борту КРМ, его результаты используются для коррекции наведения КРМ на очередном предстоящем витке орбиты.

## 3. Швартовка, стыковка и обслуживание ГСС

Робот имеет манипулятор антропоморфной структуры с 6 степенями свободы при компонентах  $q_s$  вектора  $\mathbf{q}$  угловых координат. При моделировании движения механической связки КРМ с ГСС изменяемой структуры используется векторная форма уравнений Эйлера-

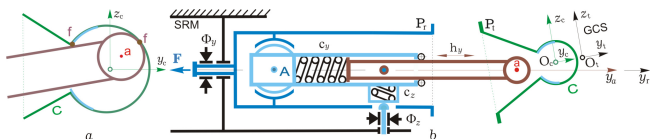


Рис. 4: Схема стыковки (а) с механизмом «штырь-конус» (b)

Лагранжа [2]. Схема стыковочного механизма «штырь-конус» и перемещение штыря при швартовке представлены на рис. 4 и 5, а результаты имитации полетного обслуживания ГСС — на рис. 14–20 в [2].

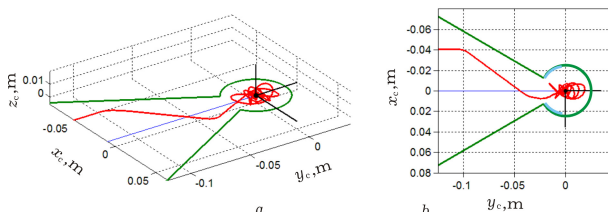


Рис. 5: Траектория движения головки штыря при швартовке

#### 4. Основные результаты и созданные алгоритмы

Обоснованы параметры манипулятора и алгоритмы управления его приводами при задании законов наведения набором векторных сплайнов. Используются разработанные оригинальные алгоритмы согласованного управления СГК и ЭДУ с ШИМ тяги каталитических ЭРД.

#### 5. Заключение

Кратко описаны разработанные методы управления космическим роботом-манипулятором на геостационарной орбите и результаты их применения, полученные компьютерной имитацией.

#### Список литературы

1. *Testoyedov N., Rayevsky V., Somov Ye., Titov G., Yakimov Ye.* Attitude and Orbit Control Systems of Russian Navigation, Navigation and Geodesic Satellites: History, Present and Future // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 6422–6427.
2. *Somov Ye., Somov S., Butyrin S., Somova T.* Nonlinear Problems of Guidance and Control of a Space Robot-Manipulator in Geostationary Orbit // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. 2024. V. 15. No. 4. P. 1095–1105.

# Control of a Space Robot During Approach, Docking and Servicing of a Geostationary Satellite

*Ye. Somov, S. Somov, S. Butyrin, T. Somova, P. Kuznetsov*

SamGTU, Samara, Russia

Methods for controlling a space robot during approach, docking, and servicing of a geostationary satellite are presented.

---

УДК 517.9 : 629.78

## Существование и устойчивость колебаний в мехатронной релейной системе управления с гистерезисом

*Е. И. Сомов, С. Е. Сомов, С. А. Бутырин,  
Т. Е. Сомова, П. К. Кузнецов*

СамГТУ, Самара, Россия

*e\_somov@mail.ru, s\_somov@mail.ru, butyrinsa@mail.ru,  
te\_somova@mail.ru, kurnesov@mail.ru*

Для дифференциального включения третьего порядка с разрывной гистерезисной правой частью получены условия существования экономного одностороннего предельного цикла и его орбитальной асимптотической устойчивости.

*Ключевые слова:* релейная система управления, гистерезис, колебания, экономный предельный цикл, существование и устойчивость

### 1. Введение

В классе систем управления ориентацией (СУО) спутников с двигателями-маховиками (ДМ) *без измерения* угловой скорости широкое применение нашли релейные схемы, возможно, с гистерезисом, рис. 1а:

- с *противовключением* на интервале времени, пропорциональном длительности предшествующего управляющего импульса, рис. 1б;
- с *псевдоскоростной импульсной модуляцией*, релизуемой релейным усилителем с гистерезисом и апериодической обратной связью, рис. 1с, при квазипостоянстве момента сил сухого трения ДМ.

Приводятся условия существования одностороннего предельного цикла (ОПЦ) и его орбитальной асимптотической устойчивости.

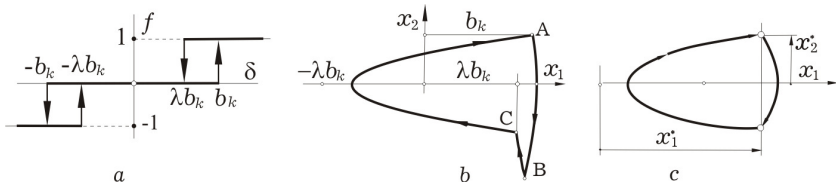


Рис. 1: Релейная гистерезисная характеристика общего вида и одно-сторонние предельные циклы нелинейных колебаний

## 2. Математическая модель и обсуждение задачи

При векторе состояния  $\mathbf{x} = \{x_i\}$  и обозначении *правой производной*  $D^+$  модель релейной мехатронной СУО мини-спутника (МС) в режиме угловой стабилизации описывается соотношениями

$$(1) \quad D^+ \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \alpha) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}f(\delta, \alpha) + \mathbf{d}; \quad \delta = \mathbf{c}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^o, \alpha) \equiv \mathbf{x} \in H \equiv \{\mathbf{x} : |x_3| < k_k\} \subset \mathbb{R}^3; \quad t \in T_0 \equiv [0, +\infty);$$

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{x}^o, \alpha) = \mathbf{x}^o \in H^o \equiv \{\mathbf{x}^o : |x_3^o| < k_k\}; \quad \delta^o = \mathbf{c}\mathbf{x}^o; \quad f(\delta^o, \alpha) = \alpha;$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_k^{-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_c \\ k_k/T_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_d \\ 0 \end{bmatrix};$$

$\alpha \in (-1, 0, 1)$ ;  $\mathbf{c} \equiv [1, 0, -1]$ ; функция гистерезиса  $f(\delta, \alpha) \in (-1, 0, 1)$ :

$$f(\delta, \alpha) = \begin{cases} \text{sgn } \delta & |\delta| > \lambda b_k, \\ 0 & |\delta| < b_k \end{cases}; \quad \text{sgn } \delta = \begin{cases} 1 & \delta > 0; \\ -1 & \delta < 0. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha$  определяет «память» гистерезиса,  $x_1 = \phi - g^r$  и  $x_2$  представляют ошибки стабилизации МС по углу  $\phi$  и скорости при команде  $g^r \equiv 0$ ,  $a_c$  — модуль управляющего ускорения ДМ,  $a_d = a_c/m$  — возмущающее ускорение при  $m = \text{const}$ ,  $x_3$  — координата аperiodической обратной связи (АОС) релейного усилителя (РУ). Решение дифференциального включения (1) понимается как *сильное правостороннее* [1]: непрерывная, дифференцируемая справа по  $t \in T_0$  функция  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^o, \alpha)$ , *всюду* на  $T_0$  удовлетворяющая уравнениям (1) и  $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}^o, 1) = \mathbf{x}^o$ , см. также публикации А.Ф. Филиппова, М.А. Айзермана и Е.С. Пятницкого.

## 3. Существование одностороннего предельного цикла

При столбцах координат  $\mathbf{x}_c$  срабатывания и  $\mathbf{x}_o$  отпускаания РУ с длительностями импульса  $T_i$  и паузы  $T_p$ , а также операторах  $X_c(t, \mathbf{x})$  и  $X_o(t, \mathbf{x})$  система (1) имеет ОПЦ при разрешимости системы уравнений

$$\mathbf{c}\mathbf{x}_c = b_k, \quad \mathbf{x}_o = X_c(T_i, \mathbf{x}_c); \quad \mathbf{c}\mathbf{x}_o = \lambda b_k, \quad \mathbf{x}_c = X_o(T_p, \mathbf{x}_o)$$

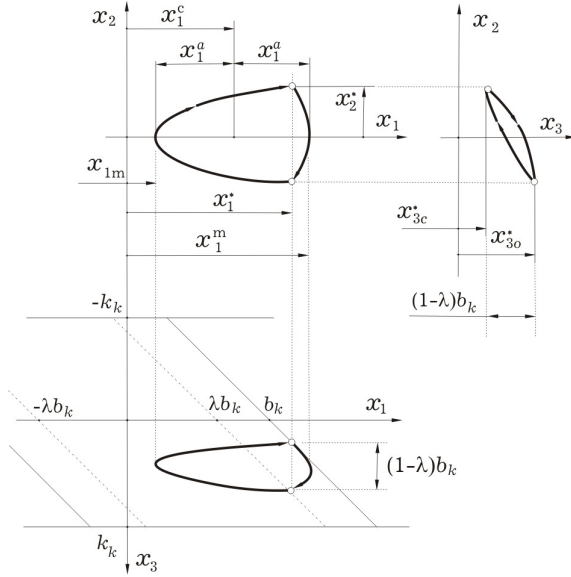


Рис. 2: Проекция ОПЦ на координатные плоскости

с условиями  $T_i > 0$ ,  $T_p > 0$ ;  $\delta_c \equiv \delta(t_c, \mathbf{x}_o, 0) > -b_k$ ,  $t_c \in (T_i, T_i + T_p)$ .

При функциях  $\varphi(z) = (1 - z)/(1 - z^m)$  и  $z_i = \exp(-T_i/T_k)$  с помощью приспособывания краевых условий двух последовательных переключений РУ выводится трансцендентное уравнение периодов

$$\varphi(z_i)(1 - z_i^{(m-1)}) \equiv (1 - z_i)(1 - z_i^{(m-1)})/(1 - z_i^m) = \nu \equiv b_k(1 - \lambda)/k_k.$$

Условие разрешимости этого уравнения получается при раскрытии неопределенности в предельных соотношениях при  $T_i \rightarrow 0$  по правилу *Лопиталля*:  $\nu = b_k(1 - \lambda)/k_k < 1$ , его корень  $z_i^* \equiv \exp(-T_i^*/T_k)$  определяет координаты изображающей точки при срабатывании и отпускании РУ, длительности  $T_i^*$  и  $T_p^*$ , а также период ОПЦ  $T^* = T_i^* + T_p^*$ . Проекция ОПЦ на рис. 2 рассчитываются по соотношениям  $T_i^* = -T_k \ln z_i^*$ ;

$$T_p^* = (m - 1)T_i^*; T^* = -mT_k \ln z_i^*; x_1^* = x_{1c}^* = x_{1o}^* = \lambda b_k + k_k \varphi(z_i^*);$$

$$x_2^* = x_{2c}^* = -x_{2o}^* = a_c T_p^*/(2m); x_{3c}^* = k_k \varphi(z_i^*)(z_i^*)^{m-1}; x_{3o}^* = k_k \varphi(z_i^*);$$

$$x_1^m = x_1^* + x_2^* T_i^*/4; x_{1m} = x_1^* - x_2^* T_p^*/4; x_1^c = x_1^* - x_2^*(m-2)T_i^*/8; x_1^a = x_2^* T^*/8.$$

#### 4. Орбитальная асимптотическая устойчивость ОПЦ

При сингулярных числах  $\rho_i$  матрицы  $\mathbf{C} = \mathbf{A}_o \mathbf{A}_c$  *точечного отображения* и ее спектральной норме  $\rho_s = (\max_i \rho_i(\mathbf{B}))^{1/2}$  с матрицей  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^t \mathbf{C}$  устойчивость ОПЦ указанного типа достигается при  $\rho_s < 1$ .

#### 5. Заключение

В явном виде представлены параметры и условия устойчивости нелинейных колебаний в релейной мехатронной системе с гистерезисом.

#### Список литературы

1. *Матросов В.М.* О теории дифференциальных уравнений и неравенств с разрывными правыми частями. Годичник на ВУЗ. Приложна математика. София: Техника, 1982. Т. 17. Кн. 4. С. 6–34.

#### Existence and Stability of Oscillations in a Mechatronic Relay Control System With Hysteresis

*Ye. Somov, S. Somov, S. Butyrin, T. Somova, P. Kuznetsov*

SamGTU, Samara, Russia

For a third-order differential inclusion with a discontinuous hysteretic right-hand side, conditions for the existence of a one-sided limit cycle and its orbital asymptotic stability are presented.

---

## Компьютерный анализ хаотического поведения в динамических системах

*С. Н. Стребуляев, А. М. Круглов*

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Н. Новгород, Россия  
sstrebuliaev@mail.ru, amkruglov31@gmail.com

Проведено исследование математических моделей Дуффинга и Лоренца с помощью разработанного программного обеспечения по схеме качественной теории динамических систем: определение количества и координат состояний равновесия, расчет и анализ интегральных кривых и фазового пространства в окрестности каждого из состояний равновесия, анализ условий возникновения хаотического движения в системах при изменении их параметров. В процессе компьютерного моделирования использована система аналитических вычислений (САВ) Maple.

*Ключевые слова:* хаотическое поведение, фазовый портрет, модель Дуффинга, модель Лоренца

### 1. Введение

В настоящее время при исследовании конкретных динамических систем получила широкое распространение методология математического моделирования и вычислительного эксперимента [1, 2]. Эта методология охватывает многие сферы, от разработки комплексов технических систем и управления ими до анализа сложных технических, экономических, биологических и ряда других систем и процессов. Математическое моделирование развивается в недрах фундаментальных наук: механики и физики, которые отличают наивысший уровень теоретических исследований. В настоящей работе приводятся фрагменты многофакторного вычислительного эксперимента по анализу зависимостей характеристик хаоса от параметров системы с использованием современных средств вычислительной техники и программного обеспечения. По мнению авторов, использование выше описанных средств компьютерного моделирования с наличием стандартных программ численного интегрирования позволило получить, по сравнению с аналитическими исследованиями, новые результаты.

Динамика роста вычислительных возможностей современных компьютеров достаточно высока и позволяет надеяться на успешное решение все более сложных задач.

## 2. Основной результат

**Хаотические режимы в модели Лоренца.** Рассматривается общеизвестная модель Лоренца [3, 4], в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Определяются состояния равновесия в количестве трех (при  $r > 1$ ) и одном (при  $r = 1$ ). На базе этих зависимостей создано универсальное программное обеспечение. Это обеспечение выполняет численный расчет динамических характеристик: от вычисления координат состояний равновесия до построения глобальной структуры фазового пространства. Также реализован алгоритм, позволяющий при изменении параметров системы, определять наличие или отсутствие хаоса (рис.1). В процессе компьютерного моделирования используются возможности САВ Maple в области численного решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с визуализацией результатов расчетов и виде графиков в режиме анимации.

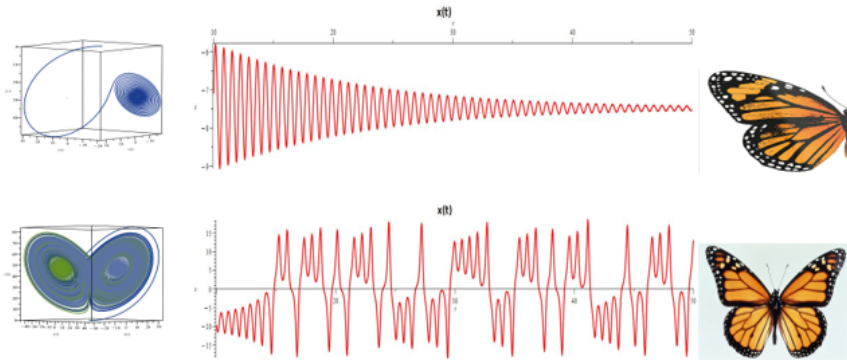


Рис. 1: Глобальная структура фазового пространства и интегральные кривые

В дальнейшем проведен поиск областей наличия и отсутствия хаоса при изменении параметров  $r$ ,  $b$ ,  $\sigma$  системы Лоренца. Результаты исследований приведены ниже (рис. 2, 3)

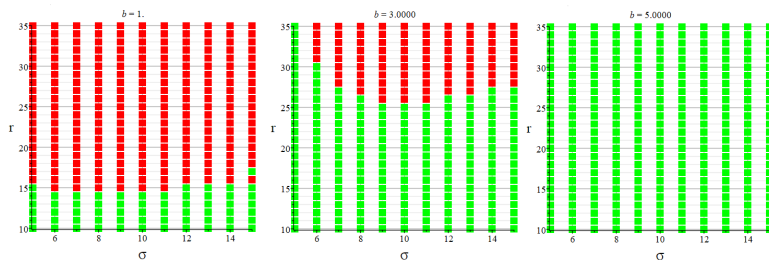


Рис. 2: Области наличия и отсутствия хаоса при изменении параметров  $r$ ,  $b$ ,  $\sigma$

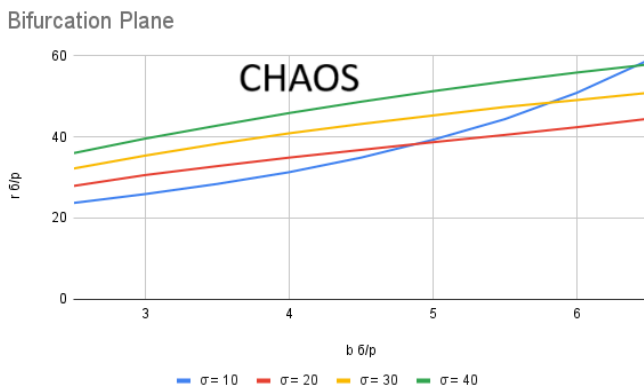


Рис. 3: Границы возникновения хаоса в пространстве параметров модели Лоренца

**Хаотические режимы в модели Дуффинга.** Нелинейный осциллятор, описываемый уравнением Дуффинга и находящийся под действием гармонической внешней силы, содержащий, в общем случае, постоянную составляющую имеет вид [3]:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx + \gamma x^3 = B_0 + B \cos \omega t$$

Для уравнения рассматриваются различные виды упругих характеристик [3]: мягкая ( $k > 0$ ,  $\gamma < 0$ ), жесткая ( $k > 0$ ,  $\gamma > 0$ ), с нулевой

( $k = 0, \gamma > 0$ ) и отрицательной ( $k < 0, \gamma > 0$ ) линейной жесткостью. Как при мягкой, так и при жесткой упругой характеристике хаотические колебания существуют при достаточно большой амплитуде внешней силы в некотором интервале частот  $\omega$ . Результаты вычислительного эксперимента для  $x(t)$  и фазовый портрет приведены на рис.4,5.

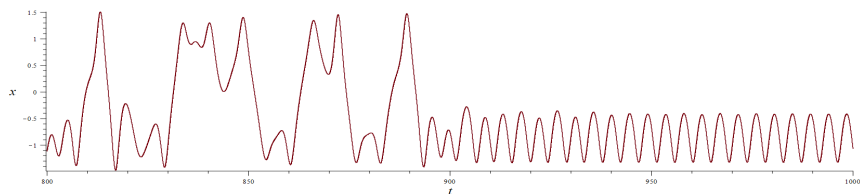


Рис. 4: Зависимость  $x(t)$  при значениях параметров  $\alpha = 0.1, k = -1, \gamma = 1, B_0 = 0, B = 0.3, \omega = 1.4$

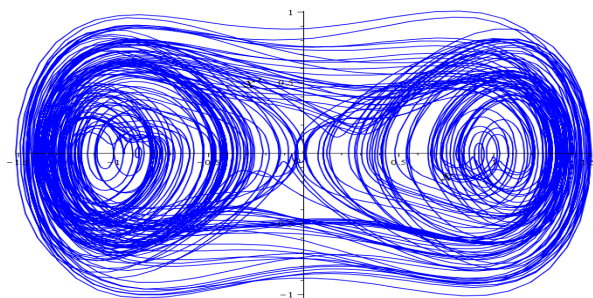


Рис. 5: Фазовый портрет системы Дуффинга при параметрах:  $\alpha = 0.1, k = -1, \gamma = 1, B_0 = 0, B = 0.3, \omega = 1.4$

В дальнейшем проводился более детальный анализ интегральных кривых, аттрактора и карт Пуанкаре.

### 3. Заключение

В рассмотренной работе приведены некоторые результаты математического моделирования и расчета характеристик хаотического движения в моделях Лоренца и Дуффинга. Рассмотрение указанных систем проводилось в полной мере с учетом всех их нелинейных характеристик без каких-либо упрощений. Использование САВ Maple для

достижения результатов исследования показало эффективность этого программного обеспечения. Полученные результаты исследований и разработанное универсальные программные средства позволят в дальнейшем проводить более детальный качественный и количественный анализ систем, аналогичных исследованным выше.

#### Список литературы

1. *Стребуляев С.Н., Сироткина Д.А.* Учебно-исследовательские проекты по анализу динамического качества технических систем и процессов с использованием их математических моделей // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17. № 2. С. 392–403
2. *Стребуляев С.Н., Сироткина Д.А., Сингх Д.* Автоматизированный расчет характеристик сложных динамических систем / В сб.: XIV Всероссийское совещание по проблемам управления. Сборник научных трудов. Москва, 2024. С. 2700–2704
3. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
4. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.

#### Computer Analysis of Chaotic Behavior in Dynamic Systems

*S. N. Strebulyaev, A. M. Kruglov*

N. I. Lobachevskiy State University of Nizhniy Novgorod, Russia  
sstrebulyaev@mail.ru, amkruglov31@gmail.com

In this paper presented the results of mathematical, computer modeling and calculation of the characteristics of the chaotic behavior in the Lorentz and Duffing models.

---

## Вычисление верхней границы анизотропийной нормы для моделей реакторов периодического действия

А. Д. Титов<sup>1</sup>, И. Р. Белов<sup>2</sup>

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия<sup>1</sup>

ИПУ РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>

titov.alex31@yandex.ru, ivbelov93@ipu.ru

В работе рассматривается линеаризованный вариант системы, описывающей поведение реактора периодического действия, в рамках анизотропийной теории управления. Приведено условие ограниченности анизотропийной нормы в виде системы матричных неравенств. Представлены результаты вычислительного эксперимента.

*Ключевые слова:* анизотропийная теория, дискретные системы, двумерные системы, выпуклая оптимизация

### 1. Введение

Предложенный И.Г. Владимировым стохастический подход к  $\mathcal{H}_\infty$ -теории управления со временем сформировал отдельное направление, названное анизотропийной теорией. В рамках этой теории изначально рассматривались одномерные модели объектов [1]. Перенос определений анизотропийной теории на двумерные системы не считается тривиальной задачей. Работы [2, 3] являются одними из первых, где рассмотрены элементы анизотропийного анализа подобных систем.

### 2. Постановка задачи

Существуют так называемые реакторы периодического действия, позволяющие гибко контролировать рабочие параметры. Динамика этих реакторов является нелинейным процессом, имеющим широкое применение в промышленности. Есть линеаризованная модель процесса, которая описывается в виде системы с дискретным временем [4]. Рассмотрим упрощенный вариант в следующем виде:

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1}(p+1) = (A + \Delta A)x_{k+1}(p) + (B + \Delta B)w_{k+1}(p), \\ y_{k+1}(p) = Cx_{k+1}(p), \end{cases}$$

где  $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — состояние системы,  $w_k(p) \in \mathbb{R}^{n_w}$  — входные возмущения с ограниченным уровнем средней анизотропии  $a$ ,  $k \geq 0$  и  $p$  ( $0 \leq p \leq \alpha - 1$ ) — номер и длина прохода, соответственно. Матрицы  $A$ ,

$B, C$  известны:  $A = \begin{bmatrix} 0,9898 & -1,1061 \cdot 10^{-5} \\ 0,0557 & 0,9923 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2,321 \cdot 10^{-9} \\ 4,1679 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Матрицы  $\Delta A = E_1 S_1 F_1$ ,  $\Delta B = E_2 S_2 F_2$  обозначают допустимое несоответствие модели. Их компоненты принимают следующие значения:  $F_2 = 1$ ,  $S_2 = \frac{\pi}{10}$ ,  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1,1 \cdot 10^{-5} \\ 0,056 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} -2,32 \cdot 10^{-9} \\ 4,17 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$ ,  $F_1 = I_2$ ,  $S_1 = -0,8 \cdot I_2$ , ( $I_2$  — обозначение единичной матрицы второго порядка). Граничные условия этой системы:  $x_{k+1}(0) = [0,5 \quad 310]^\top$ ,  $y_0(p) = 890,6456$ . Требуется установить верхнюю границу анизотропийной нормы данной системы при различных значениях средней анизотропии  $a$  входного возмущения.

### 3. Основной результат

Для дискретной системы вида

$$(2) \quad \begin{cases} x_{k+1}(p+1) = A_{11}x_{k+1}(p) + A_{12}y_k(p) + B_1w_{k+1}(p), \\ y_{k+1}(p) = A_{21}x_{k+1}(p) + A_{22}y_k(p) + B_2w_{k+1}(p), \end{cases}$$

можно ввести следующие расширенные матрицы ( $M$  является размерностью расширенного вектора входных возмущений,  $\Gamma_k = A_{21}A_{11}^{k-1}A_{12}$ ,  $\Theta_k = A_{21}A_{11}^{k-1}B_1$ ):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{22} + \Gamma_1 & A_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{22} + \Gamma_1 + \Gamma_2 & A_{22} + \Gamma_1 & A_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{22} + \sum_{k=1}^M \Gamma_k & A_{22} + \sum_{k=1}^{M-1} \Gamma_k & \cdots & \cdots & A_{22} + \Gamma_1 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_2 + \Theta_1 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B_2 + \Theta_1 + \Theta_2 & B_2 + \Theta_1 & B_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_2 + \sum_{k=1}^M \Theta_k & B_2 + \sum_{k=1}^{M-1} \Theta_k & \cdots & \cdots & B_2 + \Theta_1 & B_2 \end{pmatrix}.$$

С помощью нижеприведенной теоремы можно опеределить верхнюю границу анизотропийной нормы для двумерной дискретной системы.

**Теорема 1.** Пусть для системы (2), описывающей повторяющийся процесс, с произвольными граничными данными выполнено условие  $\rho(\mathcal{A}) < 1$ . Тогда анизотропийная норма такой системы строго ограничена заданным значением  $\gamma > 0$ , т. е.  $\|F\|_a < \gamma$ , если система неравенств  $\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/M} < \gamma^2$ ,  $\eta > \gamma^2$ ,

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I & \mathcal{B}^\top \Phi & 0 \\ \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -\Phi & 0 & \mathcal{A}^\top \Phi & I \\ 0 & -\eta I & \mathcal{B}^\top \Phi & 0 \\ \Phi \mathcal{A} & \Phi \mathcal{B} & -\Phi & 0 \\ I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

имеет решение относительно скалярных переменных  $\eta$ ,  $\gamma^2$  и симметричных положительно определенных матриц  $\Phi$ ,  $\Psi$ .

Преобразовав систему (1), с помощью теоремы 1 возможно вычислить верхнюю границу  $a$ -анизотропийной нормы. Определено, что  $\|F\|_a \leq 0,0299$  при  $\alpha = 70$ . Также выявлено, что с ростом числа точек внутри прохода наблюдается рост нормы. К примеру, для меньших значений  $\|F\|_a \leq 0,0213$  (при  $\alpha = 50$ ),  $\|F\|_a \leq 0,0126$  (при  $\alpha = 30$ ),  $\|F\|_a \leq 0,0083$  (при  $\alpha = 20$ ).

#### 4. Заключение

Рассмотрена задача анизотропийного анализа для двумерных систем специального вида. Описанный в данной статье подход позволяет получить верхнюю оценку анизотропийной нормы для систем, имеющих применение в различных физических и биохимических процессах.

#### Список литературы

1. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Invariant Systems // Proc. 13th IFAC World Congress. San Francisco, CA, USA, 1996. P. 179–184.
2. Титов А.Д. Вычисление уровня средней анизотропии для системы с двумерным временем // Управление большими системами. 2026. №. 119. С. 138–159.
3. Титов А.Д., Юрченков А.В. Анизотропийная норма линейной двумерной системы с нулевыми граничными условиями / В сб. Труды 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). М.: ИПУ РАН, 2024. С. 100–104.
4. J. Liu, Z. Zhou, W. Hong, J. Shi Two-Dimensional Iterative Learning Control With Deep Reinforcement Learning Compensation for the Non-Repetitive Uncertain Batch Processes // J. of Process Control. 2023. V. 131. 103106.

# Calculation of the Upper Bound of the Anisotropic Norm for Models of Batch Reactors

*A. D. Titov, I. R. Belov*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia

titov.alex31@yandex.ru, ivbelov93@ipu.ru

The paper considers a linearized version of the system describing the behavior of a batch reactor within the framework of the anisotropy-based theory. The condition of limitation of the anisotropic norm in the form of a system of matrix inequalities is given. The results of a computational experiment are presented.

---

## Минимаксное управление упругими механическими системами

*П. П. Ткаченко, Д. В. Баландин, Т. В. Рябикова*

АНОО ВО «Научно-технологический университет «Сириус»,  
ФТ Сириус, Россия

PTkachen@gmail.com, dbalandin@yandex.ru, tanya.dovid@gmail.com

Рассматриваются задачи управления колебаниями упругих механических систем при внешних воздействиях из заданного класса. В качестве показателей, характеризующих колебательные процессы, принимаются максимальные на заданном классе воздействий деформации упругих элементов системы. Минимаксная задача состоит в нахождении управления в форме обратной связи по переменным состояния механической системы, минимизирующего заданный показатель. В качестве первого этапа решения задачи оптимального управления исследуется вопрос о наихудшем воздействии из заданного класса на упругую механическую систему. Далее с использованием техники линейных матричных неравенств строится решение задач оптимального управления колебаниями механической системы. Задачи управления рассматриваются в многокритериальных постановках. Приводятся примеры численного решения задач о нахождении наихудшего воздействия и оптимального гашения колебаний связанных механических конструкций, моделирующих динамику высотных сооружений при сейсмических воздействиях.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, наихудшее воздействие

### 1. Математическая модель и постановка задачи управления

В рамках данной работы рассматривается система из  $n$  материальных точек соединенных между собой и с подвижным основанием (некоторой точкой, масса которой значительно превосходит остальные точки) линовыми упругими и диссипативными связями, на которую оказывают влияние две силы: внешнее возмущение, а также управляющее воздействие. Математическая модель системы:

$$(1) \quad M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = B_v v + B_u u, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0 \quad z(t) = l^T q(t),$$

где  $q \in \mathbb{R}^n$  — вектор координат,  $v \in \mathbb{R}^1$  — возмущение; симметрические положительно определенные матрицы  $M$ ,  $C$ ,  $K$  определяющие массы, коэффициенты демпфирующих и упругих линейных элементов;  $B_v$ ,  $B_u$  —  $n \times 1$ -матрицы, характеризующие точки на которые дей-

ствуют возмущение и управление соответственно;  $v = v(t) \in L_2[0, T]$ ;  $u$  — управляющее воздействие;  $z(t)$  — целевой выход;  $l^\top$  — заданная вектор-строка.

Для нахождения оптимального управления в работе предлагается рассматривать задачу минимизации максимальной деформации системы, где внешнее возмущение принадлежит классу  $L_2$ , а критерий максимальной деформации задается при помощи  $H_2$ -нормы:

$$(2) \quad J_T[u(q, \dot{q})] = \sup_{v \neq 0} \frac{\max_{t \in [0, T]} |z(t)|}{\|v\|_2} \rightarrow \min_u$$

## 2. Задача о наихудшем воздействии

Для механической системы, описывающей цепочку упруго связанных масс с демпфированием (система на рис. 1), решена задача поиска наихудшего возмущения в классе  $L_2[0, T]$ , максимизирующего функционал (2). Получены явные выражения для оптимального возмущения и соответствующего показателя качества:

$$(3) \quad v_*^{(2)}(t) = l^\top \Psi(T-t)B, \quad J_T^{(2)} = \left\{ \int_0^T |l^\top \Psi(\theta)B|^2 d\theta \right\}^{1/2}.$$

Результаты моделирования представлены на рис. 2

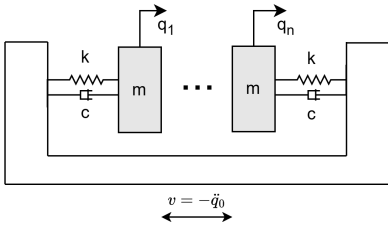


Рис. 1: Модель системы

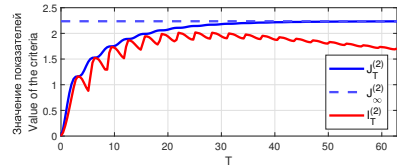


Рис. 2:  $J_T^{(p)}, I_T^{(p)}$  для системы с двумя степенями свободы

В работе также показано, что подобный подход может быть применен и к механическим системам с распределенными параметрами. В частности рассматривается вязко-упругая модель консоли, описываемая уравнением:

$$(4) \quad \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \vartheta I_z \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + EI_z \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = v(t),$$

где  $\rho$  — плотность материала,  $S$  — площадь поперечного сечения,  $w(x, t)$  — динамический прогиб балки в точке с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $\vartheta$  — коэффициент вязкости материала,  $E$  — модуль Юнга,  $I_z$  момент инерции поперечного сечения балки,  $v(t)$  — интенсивность внешнего возмущения

### 3. Задача о минимаксном управлении

Рассматривается задача многокритериального управления связанными объектами, позволяющая перераспределять внешние воздействия между подсистемами. Для системы из двух объектов (рис. 3) формулируется двухкритериальная задача оптимизации в терминах линейных матричных неравенств (LMI):

$$(5) \quad \begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & Y l_k^{(i)T} \\ l_k^{(i)} Y & \gamma^2 \alpha_k^2 I \end{pmatrix} \geq 0$$

$$(6) \quad \gamma^2 \rightarrow \inf, \quad k = 1, \dots, N,$$

где  $A, B_u, B_v$  — матрицы системы в безразмерном виде;  $Y = Y^T > 0$ ;  $\theta$  — элементы матрицы обратной связи,  $Z = Y^{-1}\theta$ ;  $\alpha_k$  — весовые коэффициенты свертки критериев;  $\gamma$  — минимизируемый параметр.

Результаты моделирования приведены на рис. 4

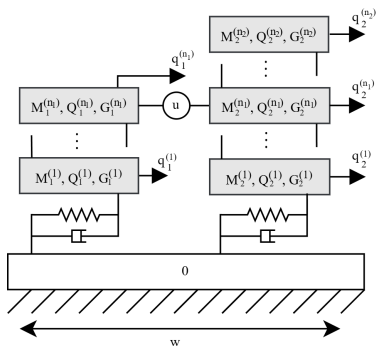


Рис. 3: Пример системы

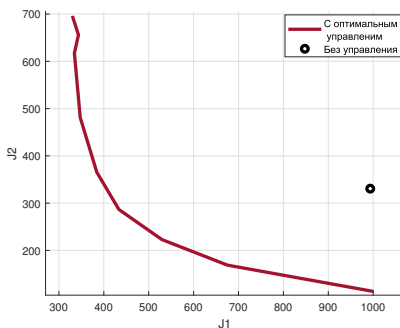


Рис. 4: Парето оптимальный фронт

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Проект № 24-11-20023), <https://rscf.ru/project/24-11-20023/>.

## Minimax Control of Elastic Mechanical Systems

*P. P. Tkachenko, D. V. Balandin, T. V. Ryabikova*

Sirius University of Science and Technology of Sirius, Russia  
PTkachen@gmail.com, dbalandin@yandex.ru, tanya.dovid@gmail.com

This paper addresses the problems of controlling oscillations in elastic mechanical systems subjected to external disturbances from a specified class. The performance indices characterizing the oscillatory processes are taken as the maximum deformations of the system's elastic elements over the given class of disturbances. The minimax problem consists of finding a feedback control law based on the state variables of the mechanical system that minimizes the specified index. As the first stage of solving the optimal control problem, the issue of the worst-case disturbance from the given class affecting the elastic mechanical system is investigated. Subsequently, using the technique of linear matrix inequalities, a solution to the optimal control problems for the system's oscillations is constructed. The control problems are considered in multi-objective formulations. Examples of numerical solutions for finding the worst-case disturbance and optimal vibration suppression in coupled mechanical structures, modeling the dynamics of high-rise structures under seismic excitations, are provided.

---

УДК 517.93:531.36

### **Многочастотные колебания в обратимой механической системе и их стабилизация**

*В. Н. Тхай*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
tkhai@ipu.ru

Исследуются симметричные движения обратимой механической системы. Построена глобальная теория многочастотных колебаний. Поставлена и решена задача стабилизации многочастотного колебания.

*Ключевые слова:* обратимая механическая система, симметричные многочастотные колебания, глобальная теория, стабилизация

## 1. Введение

Многочастотные колебания являются важнейшим предметом исследования в нелинейной динамике (см. [1–4], другие книги и многочисленные статьи). Для исследования таких колебаний применяются универсальные асимптотические методы [1, 2], теория возмущений [3, 4] и другие методы. Многочастотные колебания называются: в теории дифференциальных уравнений — квазипериодическими решениями, в классической и небесной механике — условно-периодическими движениями, в небесной механике и теории автономных систем — условно-периодическими орбитами. Глобальная теория многочастотных колебаний для лагранжевой системы, подверженной действию позиционных сил, описана в [5].

## 2. Основной результат

Обратимая механическая система выделяется свойством пространственно-временной симметрии и описывается уравнениями

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{u} &= U(u, v), \quad \dot{v} = V(u, v), \quad u \in \mathbb{R}^l, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad l \geq n, \\ U(u, -v) &= -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v) \end{aligned}$$

(рассматриваются гладкие функции). Обычно за  $u$  принимается вектор координат (квазикоординат), за  $v$  — вектор скоростей (квазискоростей). Фазовый портрет системы (1) симметричен относительно неподвижного множества  $M = \{u, v : v = 0\}$ .

Начальная точка симметричного движения принадлежит неподвижному множеству  $M$ , на котором переменная  $v = 0$ . Пусть в симметричном движении системы (1) для переменных  $v_s$  в некоторые моменты времени  $t = t_s$  выполняются равенства

$$(2) \quad v_s(u^0, t_s) = 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

В равенствах (2) по каждой переменной  $v_s$  отсчитывается свое время  $t_s$ . Положим, что равенства (2) выполняются в точке  $u^0 = u^*$ . В силу симметрии траектории относительно  $M$  получаем  $2t_s$ -периодическое движение по переменной  $v_s$ , которая представляется замкнутой кривой в фазовом пространстве. В зависимости от числа  $k$  несоизмеримых чисел в наборе  $\{t_s\}$  получается симметричное  $k$ -частотное колебание (СК). Равенства (2) дают необходимые и достаточные условия существования  $k$ -частотного СК. Рассмотрением всего множества начальных точек, для которых выполняются условия (2), получается  $(l - n)$ -семейство  $k$ -частотных СК.

Единое время  $\gamma$  по всем переменным в СК вводится равенствами  $t_s = \nu_s \gamma$ . Равенства (2), записанные для фиксированного момента  $\gamma = \tau$ , приобретают вид

$$(3) \quad v_s(u^0, \nu_s \tau) = 0, \quad s = 1, \dots, n.$$

В системе уравнений (3) число  $2\tau$  становится *общим периодом* по всем переменным  $v_s$  в СК. С изменением  $\tau$  меняется общий период и происходит переход от одного СК к другому СК с новой начальной точкой на  $M$ . Единое время  $\gamma$  и общий период  $2\tau$  применяются для построения теории многочастотных колебаний, подобной теории для одночастотного колебания.

Пусть система (3) имеет решение  $(u^*, \tau^*)$ . Вычислим матрицу Якоби  $J(u^0, \tau)$  для СК при  $(u^0, \tau^0) = (u^*, \tau^*)$ . Вводится понятие невырожденного СК для точки  $(u^0, \tau^0)$ .

**Определение 1.** Случай

$$(4) \quad \text{rank} J(u^0, \tau) = n$$

называется невырожденным для СК, а само движение — невырожденным.

Глобальная теория многочастотных СК дается теоремой.

**Теорема 1.** Если система (1) имеет невырожденное СК, то оно: а) рождается из равновесия (относительного равновесия), б) продолжается в фазовом пространстве на глобальное семейство СК по параметру  $\tau$ , в) продолжается глобально по параметру системы.

Доказательство приводится для СК с частотами  $k: 1 \leq k \leq n$ . Вводится понятие  $k$ -частотного колебания.

**Определение 2.** Семейство, полученное из СК с  $k$  частотами сдвигами фаз в колебаниях, называется  $k$ -частотным колебанием.

**Лемма 1.** В обратимой механической системе вместе с СК частоты  $k$  всегда существует  $k$ -частотное колебание, содержащее это СК.

Ставится и решается задача стабилизации  $k$ -частотного колебания в классе автономных управлений. Применяется адаптивная схема стабилизации (см. [6]). В обратной связи для консервативной системы отлеживается потенциальная энергия, для других систем — квадрат расстояния. Даются приложения.

### 3. Заключение

Даются идеи и подходы, приводящие к глобальной теории многочастных колебаний. Теорема 1 плюс адаптивная схема стабилизации составляют ядро теории для обратимых механических систем.

#### Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: АН УССР, 1945.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.
4. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987.
5. *Тхай В.Н.* Симметричные многочастотные колебания лагранжевой системы и их стабилизация // *АиТ.* 2026. (в печати).
6. *Тхай В.Н.* Адаптивная схема стабилизации колебаний автономной системы // *АиТ.* 2024. № 9. С. 77–92.

### Multifrequency Oscillations in Reversible Mechanical Systems and Their Stabilization

*V. N. Tkhai*

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Science,  
Moscow, Russia  
tkhai@ipu.ru

Symmetrical motions of reversible mechanical systems are studied. A global theory of multifrequency oscillations is constructed. The problem of stabilizing a multi-frequency oscillation was stated and solved.

---

## **Прямая адаптивная компенсация возмущений для системы гироскопа с управляющим моментом с различными запаздываниями на входе**

*К. В. Ты, Н. А. Дударенко*

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия  
congvinhvkd@gmail.com, dudarenko@itmo.ru

В работе предлагается подход к решению задачи компенсации возмущений для системы гироскопа с управляющим моментом при наличии различных запаздываний управляющих сигналов на входе. Предполагается, что внешние возмущения представляют собой многочастотные гармонические сигналы с неизвестными параметрами. Рассматриваемая задача решается с использованием метода прямой компенсации возмущений, основанного на принципе внутренней модели, в сочетании с техникой развязки каналов многомерной системы Фальба–Воловича, применяемым к линеаризованной модели гироскопа с управляющим моментом. Эффективность предложенного решения подтверждается результатами моделирования, выполненного в среде MATLAB/Simulink.

*Ключевые слова:* адаптивное управление; компенсация возмущений; многомерная система; гироскоп с управляющим моментом

### **1. Введение**

В работе рассматривается задача прямой адаптивной компенсации возмущений в многомерных системах с различными задержками в каналах управления. Объектом исследования является гироскоп с управляющим моментом модели 750 [1]. Гироскоп с управляющим моментом представляет собой нелинейную многомерную систему, широко используемую в качестве исполнительного механизма в спутниках, космических аппаратах, беспилотных транспортных средствах и морских судах. Задача компенсации возмущений решается с помощью метода прямой компенсации возмущений [3] в сочетании с техникой развязки каналов управления на основе обратной связи по состоянию [2]. Предполагается, что система гироскопа с управляющим моментом характеризуется различной величиной запаздывания сигнала в каналах управления и подвержена влиянию мультигармонических возмущений с неизвестными параметрами. Для решения поставленной задачи используется линеаризованная модель гироскопа с управляющим моментом, на основе которой выполняется развязка (декомпозиция) системы

с целью устранения перекрестных связей между каналами управления. Для декомпозированной модели системы синтезируется адаптивный закон управления, обеспечивающий устойчивость в точке равновесия одновременно с компенсацией внешних возмущений.

## 2. Основной результат

Рассмотрим линеаризованную модель гироскопа с управляющим моментом [1] в следующем виде:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u_\tau + v(t)), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

где  $x(t) = [\theta_2(t) \ \theta_1(t) \ \omega_3(t) \ \omega_2(t) \ \omega_1(t)]^\top$  — измеряемый вектор состояния,  $y(t) = [\theta_2(t) \ \theta_1(t)]^\top$  — измеряемый вектор выхода,  $u_\tau = [T_1(t - \tau_1) \ T_2(t - \tau_2)]^\top$  — вектор управляющих воздействий с запаздываниями  $\tau_i \in \mathbb{R}^+$  ( $i = 1, 2$ ),  $v(t)$  — неизмеряемый ограниченный вектор внешних возмущений. Матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются известными, соответствующих размерностей.

Цель управления заключается в обеспечении устойчивости системы (1) в точке равновесия  $g = [\theta_{2_0} \ \theta_{1_0}]^\top$ .

Закон управления для системы (1), обеспечивающий на основе обратной связи по состоянию развязку каналов управления, в соответствии с методом Фальба–Воловича [2] задается в виде

$$(2) \quad u_d(t) = -Kx(t) + Fu_\tau,$$

где  $K$  и  $F$  — вещественные постоянные матрицы соответствующих размеров. В результате выполнения процедуры декомпозиции исходная система принимает вид

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A_\Sigma x(t) + B_\Sigma u_\tau + Bv(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

Здесь  $A_\Sigma = A - BK$ ,  $B_\Sigma = BF$ , а передаточная функция  $W_u(s) = C(sI - A)^{-1}B$  имеет диагональную форму.

Закон управления для системы (3) формируется следующим образом:

$$(4) \quad u(t) = -\hat{\eta}^\top \hat{\xi}(t),$$

где  $\hat{\eta}^\top$  является настраиваемой матрицей,  $\hat{\xi}(t)$  — это оцениваемое состояние наблюдателя.

Применяя метод прямой компенсации возмущений [3] к модели, описанной в (3), можно независимо для каждого канала управления построить адаптивный алгоритм управления с расширением памяти регрессора в следующем виде:

$$(5) \quad \dot{\hat{\eta}}_i = \mu_i (Y_i - \Omega_{ii} \hat{\eta}_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь  $Y_i = H(s)[\Delta_i \varepsilon_i]$ ,  $\Omega_{ii} = H(s)[\Delta_i \Delta_i^\top]$ ,  $\varepsilon_i = \delta_i - W_{ii}(s)[u_i(t - \tau_i)]$ , где  $\delta_i$  является  $i$ -ой компонентой вектора  $\delta = y - g$ ,  $W_{ii}(s)$  — элемент, расположенный на диагонали матрицы  $W_u(s)$ , а  $H(s) = \frac{1}{\alpha s + 1}$ ,  $\alpha > 0$ .

### 3. Заключение

В данной работе представлен метод компенсации мультигармонических внешних возмущений для системы гироскопа с управляющим моментом, функционирующей в условиях наличия возмущений и задержек различной величины в каналах управления. Предложенный метод сочетает линейную декомпозицию системы на основе обратной связи по состоянию, выполненную в соответствии с классическим подходом Фальба–Воловича, с методом прямой компенсации возмущений, основанном на принципе внутренней модели. Результаты численного моделирования иллюстрируют эффективность предложенного подхода.

Предлагаемый подход может быть также применим в практических приложениях.

### Список литературы

1. *Angelico B. A., Barbosa F. S., Toriumi F. Y.* State Feedback Decoupling Control of a Control Moment Gyroscope // *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*. 2017. V. 28. P. 26–35.
2. *Falb P., Wolovich W.* Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1967. V. 12, No. 6. P. 651–659.
3. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection. Cham, Switzerland: Springer, 2022.

## Direct Adaptive Disturbance Compensation for a Control Moment Gyroscope with Distinct Input Delays

*C. V. Tu, N. A. Dudarenko*

ITMO University, St. Petersburg, Russia  
congvinhvkdn@gmail.com, dudarenko@itmo.ru

The paper presents an approach to the disturbance compensation problem for the Control Moment Gyroscope in the presence of different control delays at the input. The external disturbances take the form of multiharmonic signals with unknown parameters. The problem is solved with a direct disturbance compensation technique derived from the internal model principle together with the Falb–Wolovich decoupling method, applied to a linearized Control Moment Gyroscope model. The effectiveness of the proposed method is validated through simulations conducted in the MATLAB/Simulink environment.

---

УДК 517.977.52

## Экстремальные траектории в задаче Маркова с управлением на треугольнике

*М. С. Федосеев, А. А. Ардентов*

ИПС РАН, Переславль-Залесский, Россия  
fedoseev070888@gmail.com, aaa@pereslavl.ru

Рассмотрена задача оптимального быстродействия для робота с дифференциальным приводом и ограниченными положительными скоростями ведущих колес. Эта задача эквивалентна обобщению классической задачи Маркова с расширенной областью управления. Для классификации всех экстремальных управлений используется принцип максимума Понтрягина. Начато исследование экстремальных решений и необходимых условий оптимальности. Данное исследование важно для планирования движения в наземной робототехнике.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, задача быстродействия, задача Маркова, колесный робот

## 1. Введение

Рассматривается модель робота, который может двигаться только вперед вдоль кривой ограниченной кривизны. Для решения можно использовать классическую задачу Маркова. Но в модели Маркова предполагается, что время любого перемещения пропорционально пройденному пути. Такая модель не работает для реального робота из-за особенности кинематики: при повороте максимальная линейная скорость робота падает по сравнению с движением по прямой. Предполагается использовать модель, учитывающую зависимость скорости от типа маневра.

## 2. Постановка задачи Маркова на треугольнике

Рассматриваемая задача быстройдействия для колесного робота эквивалентна следующей задаче оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \\ (x(0), y(0), \theta(0)) = (0, 0, 0), \quad (x(T), y(T)) = (x_1, y_1), \\ T \rightarrow \min,$$

где  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  задает положение центра колесной пары на плоскости,  $\theta \in S^1$  есть угол ориентации робота относительно оси абсцисс, а управление  $u = (u_1, u_2) \in U$  соответствует линейной и угловой скорости робота, которая принадлежит треугольнику (см. рис. 1)

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \mid u_1 \in [1, u_1^{\max}], |u_2| \leq \frac{u_1^{\max} - u_1}{u_1^{\max} - 1} \right\}.$$

## 3. Классификация экстремальных управлений

Для описания экстремалей используется принцип максимума Понтрягина [1]. Введем вектор сопряженных переменных  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  и функцию Понтрягина

$$\mathcal{H}(\psi, \theta, u) = u_1(\psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta) + u_2 \psi_3.$$

Уравнение гамильтоновой системы для сопряженных переменных принимает следующий вид:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\mathcal{H}_x = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\mathcal{H}_y = 0, \\ \dot{\psi}_3 = -\mathcal{H}_\theta = u_1(\psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta). \end{cases}$$

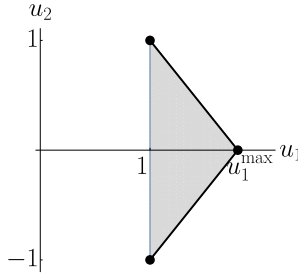


Рис. 1: Множество допустимых управлений  $U$

Имеем условие максимума  $H(\psi, \theta) = \max_u \mathcal{H}(\psi, \theta, u) \geq 0$ , условие нетривиальности  $\psi \neq (0, 0, 0)$  и условие трансверсальности  $\psi_3(T) = 0$ .

Анализ фазового портрета системы (1) позволяет сформулировать следующую теорему с учетом ограничений, полученных в работе [2].

**Теорема 1.** *Экстремальные траектории, подозрительные на оптимальность, порождаются кусочно-постоянным управлением. Возможны следующие типы решений:*

- $S, T_1 \in (0, \infty)$ ;
- $C, T_1 \in (0, \pi]$ ;
- $CC, T_1 \in (0, \pi], T_2 = \pi$ ;
- $CS, T_1 \in (0, \pi], T_2 \in (0, \infty)$  или  $T_1 \in (\pi, 2\pi)$ ,  
 $T_2 \in \left[ -\frac{(u_1^{\max} - 1)}{u_1^{\max}} \cot \frac{T_1}{2}, \infty \right]$ ;
- $SCS, T_1 \in (0, T_s], T_2 = T_c, T_3 = \frac{T_s}{2}$ ;
- $CSCS, T_1 \in (0, T_c], T_2 = T_s, T_3 = T_c, T_4 = \frac{T_s}{2}$ ;
- $SCSCS, T_1 \in \left( 0, \frac{T_s}{2} \right], T_2 = T_c, T_3 = T_s, T_4 = T_c, T_5 = \frac{T_s}{2}$ ,

где  $S$  соответствует движению по прямой, а  $C$  — движению по окружности; при этом  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$  задают соответствующие временные интервалы.

#### 4. Заключение

Начато исследование новой задачи Маркова на треугольнике. Получена классификация кандидатов решения. Численно исследованы решения для различных значений параметра  $u_1^{\max}$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 25-21-00681), <https://rscf.ru/project/25-21-00681/>.

#### Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
2. *Ardentov A.A.* Extremals in the Markov–Dubins Problem with Control on a Triangle // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024. V. 20. No. 1. P. 27–42.

#### Extremal Trajectories in the Markov Problem With Control on a Triangle

*M. S. Fedoseev, A. A. Ardentov*

Ailamazyan Program Systems Institute, Pereslavl-Zalessky, Russia  
[fedoseev070888@gmail.com](mailto:fedoseev070888@gmail.com), [aaa@pereslavl.ru](mailto:aaa@pereslavl.ru)

We consider a time minimizing problem for a differential drive robot with bounded positive velocities of the driving wheels. This problem is equivalent to a generalization of the classical Markov problem with an extended control domain. The Pontryagin maximum principle is used to classify all extremal controls. We study extremal solutions and necessary optimality conditions. This research is important for motion planning in ground-based robotics.

---

## Орбитальная плоскостность систем без дрейфа с двумя управлениями

Д. А. Фетисов

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия  
dfetisov@yandex.ru

Доказывается, что система без дрейфа с двумя управлениями является орбитально плоской тогда и только тогда, когда аннулятор  $K$  распределения, порожденного управляющими векторными полями системы, является структурой Гурса. Показывается, что новая независимая переменная и плоский выход в системе могут быть найдены в результате преобразования кораспределения  $K$  в нормальную форму Гурса.

*Ключевые слова:* орбитальная плоскостность, системы без дрейфа

### 1. Введение

Одним из наиболее эффективных инструментов, позволяющих решать задачи управления нелинейными системами, является подход, основанный на дифференциальной плоскостности [1]. Орбитальная плоскостность [2] является обобщением понятия дифференциальной плоскостности на случай, когда в применяемые преобразования вовлечены не только состояния, управления и их производные по времени, но и независимая переменная. Необходимое и достаточное условие орбитальной плоскостности в настоящий момент известно только для систем с одним управлением [3]. В настоящей работе мы обращаемся к проблеме орбитальной плоскостности систем без дрейфа с двумя управлениями.

### 2. Орбитальная плоскостность

Рассмотрим нелинейную систему

$$\Sigma : \dot{x} = F(x, u), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

где  $X$  и  $U$  — открытые множества, которым принадлежат состояние  $x$  и управление  $u$ ;  $F$  —  $C^\infty$ -гладкое векторное поле на  $X \times U$ . Сопоставим системе  $\Sigma$  бесконечномерное многообразие  $\mathcal{N}$  с координатами  $t, x, u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots$ , где координата  $u^{(k)}$  соответствует производной управления  $u$  порядка  $k$  по времени  $t$ , и кораспределение

$$\mathcal{J} = \text{span}\{dx_i - F_i(x, u)dt, i = \overline{1, n}; du_j^{(k)} - u_j^{(k+1)}dt, j = \overline{1, m}, k = 0, 1, \dots\}.$$

Наряду с системой  $\Sigma$ , рассмотрим систему  $\Sigma^{\text{lin}}$ :  $y' = v$  с состоянием  $y \in \mathbb{R}^m$ , управлением  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $y' = dy/d\tau$ . Системе  $\Sigma^{\text{lin}}$  сопоставим бесконечномерное многообразие  $\mathcal{N}^{\text{lin}}$  с координатами  $\tau, y, y', \dots, y^{(l)}, \dots$ , где координата  $y^{(l)}$  соответствует производной переменной  $y$  порядка  $l$  по независимой переменной  $\tau$ , и кораспределение

$$\mathcal{J}^{\text{lin}} = \text{span}\{dy_j^{(l)} - y_j^{(l+1)}d\tau, j = \overline{1, m}, l = 0, 1, 2, \dots\}.$$

**Определение 1.** [2] Систему  $\Sigma$  называют орбитально плоской в окрестности точки  $p \in \mathcal{N}$ , если существует диффеоморфизм  $\Psi$  из открытого множества  $U \subset \mathcal{N}^{\text{lin}}$  в некоторую окрестность точки  $p$ , такой, что  $\Psi^* \mathcal{J} = \mathcal{J}^{\text{lin}}$ .

Если система  $\Sigma$  орбитально плоская, то существуют натуральные числа  $r_1, \dots, r_m, k$  и гладкие функции  $\alpha, \beta, \gamma, A, B$ , такие, что переменные  $t, x, u$  локально выражаются через  $\tau, \bar{y}_1^{r_1}, \dots, \bar{y}_m^{r_m}$  соотношениями

$$(1) \quad \begin{aligned} t &= \alpha(\tau, \bar{y}_1^{r_1-1}, \dots, \bar{y}_m^{r_m-1}), \quad x = \beta(\tau, \bar{y}_1^{r_1-1}, \dots, \bar{y}_m^{r_m-1}), \\ u &= \gamma(\tau, \bar{y}_1^{r_1}, \dots, \bar{y}_m^{r_m}), \end{aligned}$$

а переменные  $\tau, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}$  локально выражаются через  $t, x$  и  $\bar{u}^k$  соотношениями

$$(2) \quad \tau = A(t, x, \bar{u}^k), \quad y_j^{(0)} = B_j(t, x, \bar{u}^k), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Будем говорить, что соотношения (2) задают новую независимую переменную  $\tau$  и плоский выход  $y = (y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$  в системе  $\Sigma$ . Соотношения (1) являются субмерсией и позволяют определить для пары  $(\tau, y)$  понятие орбитальной разности как разность  $d_{\text{orb}} = \sum_{i=1}^m r_i - n$  между размерностью прообраза и образа в соотношениях (1).

### 3. Основные результаты

Рассмотрим систему без дрейфа с двумя управлениями

$$\Sigma_{\text{dr}} : \dot{x} = f_1(x)u_1 + f_2(x)u_2, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^2,$$

где  $X$  и  $U$  — открытые множества, а  $f_1$  и  $f_2$  — поточечно линейно независимые  $C^\infty$ -гладкие векторные поля на  $X \times U$ .

Рассмотрим гладкое кораспределение  $\mathcal{I}$  на множестве  $X$ . Производным флагом кораспределения  $\mathcal{I}$  называют последовательность кораспределений  $\mathcal{I}^{(0)} \supset \mathcal{I}^{(1)} \supset \mathcal{I}^{(2)} \supset \dots$ , которая строится по правилу

$$\mathcal{I}^{(0)} = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}^{(j+1)} = \{\omega \in \mathcal{I}^{(j)} : d\omega \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}^{(j)}}\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $d\omega$  — внешний дифференциал формы  $\omega$ .

**Определение 2.** Кораспределение  $\mathcal{I}$  называют структурой Гурса на открытом подмножестве  $X' \subset X$ , если на  $X'$  выполнены равенства  $\text{rank } \mathcal{I}^{(j)} = n - 2 - j, j = \overline{0, n-2}$ .

**Определение 3.** Кораспределение  $\mathcal{I}$  эквивалентно нормальной форме Гурса в окрестности некоторой точки  $x_0 \in X$ , если существует диффеоморфизм  $x = \beta(z)$  из открытого подмножества  $\mathbb{R}^n$  в окрестность точки  $x_0$ , такой, что  $\beta^*\mathcal{I} = \mathcal{L}$ , где

$$\mathcal{L} = \text{span}\{dz_1 - z_2 dz_n, dz_2 - z_3 dz_n, \dots, dz_{n-2} - z_{n-1} dz_n\}.$$

Известно, что если кораспределение  $\mathcal{I}$  является структурой Гурса на открытом подмножестве  $X' \subset X$ , то существует открытое, всюду плотное подмножество  $X'' \subset X'$ , такое, что для любой точки  $x_0 \in X''$  кораспределение  $\mathcal{I}$  эквивалентно нормальной форме Гурса в окрестности точки  $x_0$ .

Сопоставим системе  $\Sigma_{\text{dr}}$  на множестве  $X$  кораспределение  $\mathcal{K}$ , являющееся аннулятором распределения  $\mathcal{D} = \text{span}\{f_1, f_2\}$ , так что  $\mathcal{K} = \mathcal{D}^\perp$ .

**Теорема 1.** Система  $\Sigma_{\text{dr}}$  является орбитально плоской тогда и только тогда, когда кораспределение  $\mathcal{K}$  является структурой Гурса.

**Теорема 2.** Пусть система  $\Sigma_{\text{dr}}$  орбитально плоская, и  $x = \beta(z)$  — диффеоморфизм, такой, что  $\beta^*\mathcal{K} = \mathcal{L}$ . Если  $z = \varphi(x)$  — отображение, обратное к  $\beta$ , то для любой функции  $M(t, x)$ , удовлетворяющей условию  $\frac{\partial M}{\partial t} \neq 0$ , пара  $(\tau, y)$ , где

$$\tau = \varphi_n(x), \quad y_1^{(0)} = \varphi_1(x), \quad y_2^{(0)} = M(t, x),$$

задает новую независимую переменную и плоский выход системы  $\Sigma_{\text{dr}}$ . Для этой пары орбитальная разность равна нулю.

### Список литературы

1. *Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P.* Flatness and Defect of Nonlinear Systems: Introductory Theory and Examples // International Journal of Control. 1995. No. 61. P. 1327–1361.
2. *Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P.* A Lie-Backlund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44. No. 5. P. 922–937.
3. *Fetisov D.A.* Orbital Flatness of Single-Input Control Systems // IFAC-PapersOnline. 2025. V. 59. No. 11. P. 162–167.

# Orbital Flatness of Two-Input Driftless Control Systems

*D. A. Fetisov*

Bauman Moscow State Technical University, Russia  
dfetisov@yandex.ru

We prove that a two-input driftless control system is orbitally flat if and only if the annihilator of the distribution  $K$  spanned by the control vector fields is the Goursat structure. We show that a new independent variable and a flat output in the system can be found by transforming the codistribution  $K$  into the Goursat normal form.

---

УДК 517.91

## О скользящих режимах функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью

*И. А. Финогенко*

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия  
fin@icc.ru

Рассматриваются способы описания множества точек разрыва правых частей и условий возникновения скользящих режимов функционально-дифференциальных уравнений. Основное внимание уделяется изучению управляемых систем с разрывными обратными связями с запаздыванием методом эквивалентного управления.

*Ключевые слова:* функционально-дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, скользящий режим, обратные связи с запаздыванием, эквивалентное управление.

### 1. Введение

Мы рассматриваем функционально-дифференциальное уравнение

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), \quad x_{t_0}(\cdot) = \phi_0(\cdot),$$

где  $f : R^1 \times C_\tau \rightarrow R^n$ ,  $R^n$  —  $n$ -мерное векторное пространство,  $C_\tau$  — пространство всех непрерывных функций, определенных на отрезке  $[-\tau, 0]$  со значениями в  $R^n$  с обычной  $\sup$ -нормой,  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,

$-\tau \leq \theta \leq 0$ . В наших исследованиях функция  $f$  разрывна на множестве  $M \subset R^1 \times C_\tau$ . Движения системы (1) по множеству  $M$  по аналогии с разрывными системами без запаздывания будем называть скользящими режимами.

Функциональная природа систем с запаздыванием в теории устойчивости хорошо известна, начиная с известных работ Н.Н. Красовского, связанных с прямым методом Ляпунова. Здесь возникают проблемы с вычислением производных функционалов Ляпунова–Красовского вдоль решений, т. к. для этого в общем случае нужно знать сами решения. Такая же проблема возникает для получения уравнений скользящих режимов функционально-дифференциальных уравнений (1). Основное внимание будет уделяться управляемым системам

$$(2) \quad \dot{x} = f(t, x_t(\cdot), u(t, x_t(\cdot)))$$

в предположении, что функция  $f$  непрерывна,  $u(t, x_t(\cdot)) = (u_1, \dots, u_m)$  имеет смысл управления и каждая функция  $u_i(t, \phi(\cdot))$  разрывна на своем множестве  $M_i \subset R^1 \times C_\tau$ . Эти и другие вопросы теории разрывных систем с последствием исследовались в [2].

## 2. Скользящие режимы

Конструктивное описание множеств точек разрыва  $M_i$  и скользящих режимов для уравнений (2) опирается на теорию инвариантно-дифференцируемых функционалов из [2].

**Определение 1.** Функционал  $W(t, x, \phi(\cdot))$  инвариантно дифференцируем в точке  $p = (t, x, \phi(\cdot)) \in R^1 \times R^n \times C_\tau$ , если справедливо равенство

$$\begin{aligned} & W(t + \zeta, x + z, \Phi_\xi(\cdot)) - W(t, x, \phi(\cdot)) = \\ & = \frac{\partial W(p)}{\partial t} \cdot \zeta + \langle \nabla_x W(p), z \rangle + \partial_\phi W(p) \cdot \xi + o\left(\sqrt{\|z\|^2 + \zeta^2 + \xi^2}\right) \end{aligned}$$

для всех  $z \in R^n$ ,  $\xi \in [0, \Delta]$ ,  $\zeta \geq 0$ , где  $\nabla_x W$  — градиент функционала  $W$  по переменной  $x$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — знак скалярного произведения,  $\partial_\phi W(p)$  — инвариантная производная функционала  $W$  по переменной  $\phi(\cdot)$ , не зависящая от правой части уравнения (1). (Детальное описание см. в [2].)

Множества точек разрыва для исследуемых систем (1) и (2) рассматриваются в виде пересечения многообразий

$$M_i = \{(t, \phi(\cdot)) : W_i(t, \phi(0), \phi(\cdot)) = 0\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

которые обладают свойством граничности [2].

**Теорема 1.** Если на пересечении множеств  $M_i$  для уравнения (1) существует скользящий режим  $x(t)$ , определенный на промежутке  $[t_0 - \tau, \omega)$ , то для любого  $t \in [t_0, \omega)$  выполняется условие

$$K_i(t, x_t(\cdot)) \cap F(t, x_t(\cdot)) \neq \emptyset,$$

где  $K_i(t, x_t(\cdot)) = \{z \in R^n : \langle \nabla_x W_i(p), z \rangle + \sigma_i(p) = 0\}$  и

$$\sigma_i(p) = \frac{\partial W_i(p)}{\partial t} + \partial_\phi W_i(p), \quad p = (t, x(t), x_t(\cdot)), \quad i = 1, \dots, m.$$

### 3. Метод эквивалентного управления

Рассмотрим управляемую систему (2). Функции  $u_i^{eq} = u_i^{eq}(t, \phi(\cdot))$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\langle \nabla_x W_i(p), f(t, \phi(\cdot), u_1^{eq}, \dots, u_k^{eq}) \rangle + \partial_\phi W_i(p) + \partial_t W_i(p) \Big|_{p=(t, \phi(0), \phi(\cdot))} = 0,$$

называются эквивалентными управлениями.

**Теорема 2.** Если каждое значение  $u_i^{eq}$  содержится в отрезке с концами  $u_i^-$ ,  $u_i^+$  (предельными значениями управления  $u_i$  с обеих сторон множества  $M_i$ ), то скользящий режим уравнения (2) удовлетворяет уравнению

$$(3) \quad \dot{x} = f(t, x_t(\cdot), u_1^{eq}(t, x_t(\cdot)), \dots, u_k^{eq}(t, x_t(\cdot))).$$

### 4. Заключение

Теоремы 1 и 2 дают необходимые условия существования скользящих режимов. Факты однозначной определенности уравнений скользящих режимов вопроса о существовании скользящих режимов разрывных систем не решают и наличие последействия в них никакой роли не играет. В общем случае этот вопрос требует дополнительного исследования. В [3] он решается для управляемых механических систем на принципе декомпозиции. Теорема 2 может применяться для изучения режимов декомпозиция с последействием.

Исследование выполнено в рамках госзадания Минобрнауки России (Проект № 1210401300060-4).

### Список литературы

1. *Финогенко И.А.* Проблемы и методы исследования функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2025. Т. 522. № 2. С. 62–69.

2. *Ким А.В.*  $i$ -гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 1996.
3. *Пятницкий Е.С.* Синтез иерархических систем механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. I, II // *АиТ*. 1989. № 1. С. 87–98; № 2. С. 57–70.

## On Sliding Modes of Functional-Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Part

*I. A. Finogenko*

V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory of SB RAS,  
Irkutsk, Russia  
fin@icc.ru

Methods for describing sets of discontinuity points and the conditions for the emergence of sliding modes for functional-differential equations are considered. The primary focus is on the study of control systems with discontinuous positional feedback and delay.

---

УДК 681.5

### Синтез эталонной модели на основе метода генерирующей модели

*А. В. Финошин*

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия  
finoshin@bmstu.ru

Метод генерирующей модели основан на определении корней авторегрессионной модели сигнала и формировании на их основе линейной динамической модели. Предложена модификация метода для синтеза эталонной модели по желаемой траектории в условиях аддитивного шума. Предложено фильтровать корни с учетом полосы пропускания полезного сигнала, использовать кластеризацию для объединения близко расположенных различных корней в кратный корень и оптимизацию корней для уточнения модели. Полученные корни формируют эталонную модель заданного сигнала.

*Ключевые слова:* слежение, эталонная модель, генерирующая модель, авторегрессионная модель, аппроксимация

## 1. Введение

Метод генерирующей модели (ГМ) [1,2] позволяет в рамках одной процедуры получить динамическую модель объекта или процесса по известному выходу, сформировать базис генерирующих функций и аппроксимировать сигнал с заданной точностью. Рассматриваемый метод основан на выводе характеристического уравнения авторегрессионной модели дискретного сигнала. Корни характеристического уравнения, преобразованные в непрерывную область, формируют собственные числа динамической модели и базис генерирующих функций. В статье предлагается несколько дополнений алгоритма синтеза ГМ в условиях шума: фильтрация, кластеризация и оптимизация корней.

## 2. Основной результат

Рассмотрим сигнал  $f$ , заданный графически или таблично  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  на временном интервале  $[0, T]$  с шагом  $h$ . Сигнал представляет собой аддитивную сумму низкочастотного полезного сигнала и высокочастотного шума. Предположим, что спектр полезного сигнала ограничен частотой  $\omega_0$ . Требуется построить линейную эталонную модель заданной размерности в канонической управляемой форме со входом  $\eta$  и начальными условиями  $\mathbf{x}_G(0)$ :

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}}_G = \mathbf{A}_G \mathbf{x}_G + \mathbf{B}_G \eta, \quad y_G = \mathbf{C} \mathbf{x}_G,$$

выход которой  $y_G$  с заданной точностью аппроксимирует желаемый сигнал  $f$  на интервале  $[0, T]$ .

Рассмотрим процедуру синтеза ГМ. Первые три этапа построения ГМ описаны в [1,2]. Введем авторегрессионную модель сигнала:

$$(2) \quad f_k = a_{N,1} f_{k-1} - \dots - a_{N,N-1} f_{k-N+1} - a_{N,N} f_{k-N},$$

где  $N$  — размерность модели,  $a_{N,j}$  — параметры.

Этап 1. Определим размерность ГМ  $N$  путем последовательного расширения матрицы  $\mathbf{Z}$ , пока добавляемый столбец является линейно независимым от остальных столбцов матрицы  $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} f_k & f_{k-1} & \dots & f_{k-N} \\ f_{k-1} & f_{k-2} & \dots & f_{k-N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k-N} & f_{k-N-1} & \dots & f_{k-2N} \end{pmatrix}.$$

Этап 2. Вычислим параметры модели (2)  $a_{N,j}$ .

Этап 3. Преобразуем корни  $\lambda_{z_i}$  характеристического уравнения матрицы  $\mathbf{Z}$  из  $z$ -области в  $s$ -область по формуле  $\lambda_{s_i} = \frac{1}{h} \ln \lambda_{z_i}$ .

Этап 4. Выполним фильтрацию корней, удовлетворяющих условию  $\text{Im} \lambda_{s_i} < \omega_0$ . Оставшиеся  $N - l$  корней формируют модель шума.

Этап 5. Выполним кластеризацию  $l$  корней модели полезного сигнала, расположенных близко друг к другу, формируя кратный корень.

Этап 6. Сформируем базис генерирующих функций и представим выход ГМ в виде суммы генерирующих функций с весами  $a_i$  и  $b_i$

$$y_G = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) = \sum_{i=1}^r \left( c_i e^{(\lambda_i + j\omega_i)t} + c_i^* e^{(\lambda_i - j\omega_i)t} \right),$$

где  $a_i = 2 \sum_{k=0}^{p_i-1} \tilde{c}_{ik} t^k$ ,  $b_i = -2 \sum_{k=0}^{p_i-1} \tilde{c}_{ik}^* t^k$ ,  $c_i = \tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*$ ,  $c_i^* = \tilde{c}_{ik} - j\tilde{c}_{ik}^*$ ,  $p_i$  — кратность  $i$ -го корня,  $r$  — число различных корней. Коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ , могут быть вычислены методом наименьших квадратов. Если кластеризация оказывается ошибочной, множители при соответствующих генерирующих функциях близки к нулю.

Этап 7. Уточним значения корней, минимизирующих критерий

$$J = \sum_{i=1}^M (f_i - y_G(t_i))^2.$$

Если число корней совпадает с размерностью эталонной модели, то полученные корни являются собственными числами матрицы  $\mathbf{A}_G$ .

Этап 8. Преобразуем ГМ к эталонной модели заданной размерности вида (1), отнеся часть корней к модели входа  $\eta(t)$  [1,2]. Вычислим  $\mathbf{x}_G(0)$  путем дифференцирования выхода ГМ  $y_G(t)$ .

### 3. Пример

Для дискретного сигнала  $f(t_k) = e^{-t_k} \sin(10t_k) + e_k$ , где  $k$  — номер отсчета,  $e_k$  — белый шум, получены корни в непрерывной области:  $\lambda_{s_{1,2}} = 3.5 \pm 269.3i$ ,  $\lambda_{s_{3,4}} = 5.3 \pm 179.1i$ ,  $\lambda_{s_{5,6}} = -3.7 \pm 108.2i$ ,  $\lambda_{s_{7,8}} = -1.7 \pm 12.1i$ . После фильтрации по частотному критерию и оптимизации получены корни ГМ:  $\lambda_{s_{1,2}} = -0.996 \pm 10.002i$ , которые формируют выход ГМ в виде суммы генерирующих функций  $y_G(t) = e^{-0.996t} (0.9971 \sin(10.0023t) + 0.0007 \cos(10.0023t))$  и матрицу  $\mathbf{A}_G$  с характеристическим уравнением  $\lambda^2 - 1.992\lambda + 101.032 = 0$ .

#### 4. Заключение

Предложен итерационный алгоритм синтеза эталонной модели по заданному сигналу в условиях шума. Метод может также использоваться для построения динамической модели объекта по известному выходу, аппроксимации сеточных функций и фильтрации сигналов.

#### Список литературы

1. *Мышляев Ю.И.* Об одном подходе к решению задачи слежения с желаемой спектральной динамикой // Труды ФГУП «НИЦАП им. академика Н.А. Пилюгина». Системы и приборы управления. 2016. № 4. С. 5–11.
2. *Finoshin A., Dolgov J.* Synthesis of a Generative Model with the Reference Signal // J. Math. Sci. 2023. V. 269. P. 796–802.

#### The Reference Model Synthesis With the Generative Model Method

*A. V. Finoshin*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
finoshin@bmstu.ru

The modification of the Generative model method for the reference model synthesis is proposed. The desired trajectory is the additive sum of the useful signal and the noise. The method is extended by the filtering the roots of the autoregressive model of the signal based on the useful signal's bandwidth, and the merger of closely spaced different roots into a multiple root, and the optimization of the roots to refine the model. The processed roots forms the linear dynamic reference model.

---

## Управление каскадными системами со скользящим режимом с несимметричным дребезгом

*А. В. Финошин, Т. В. Провоторов*

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия  
earlov@gmail.com, timofeyvotorov.7a@mail.ru

Рассматривается синтез алгоритмов управления каскадными системами на основе метода скоростного биградиента. Предложены алгоритмы виртуального управления выходным каскадом с интегральной добавкой для уменьшения ошибки слежения при несимметричном дребезге. Показано значительное уменьшение статической ошибки за счет интегрального виртуального управления при стабилизации каскадной системы.

*Ключевые слова:* скользящий режим, интегральное управление, дребезг, метод скоростного градиента, стабилизация, слежение

### 1. Введение

Рассматривается задача адаптивного управления каскадной системой, состоящей из двух подсистем. Применение скользящих режимов с адаптацией неизвестных параметров выходного каскада лежат в основе метода скоростного биградиента (МСБГ) [1]. В МСБГ в качестве отклонения от поверхности скольжения рассматривается невязка между выходом входного каскада и настраиваемым виртуальным управлением выходным каскадом. Устойчивость МСБГ обосновывается методом функций Ляпунова для идеального скользящего режима [1].

Рассмотрим несимметричный реальный скользящий режим, при котором модуль отклонения от поверхности скольжения отличается в зависимости от знака отклонения. Несимметричный реальный скользящий режим приводит к ошибке слежения, уровень которой зависит от разницы модулей среднего положительного и отрицательного отклонений от поверхности скольжения. Для борьбы с несимметричным дребезгом можно использовать увеличение частоты переключения.

Повышение размерности выходного каскада за счет добавления интегратора лежит в основе МСБГ с интегральным виртуальным управлением (ИВУ) [2,3].

Целью работы является синтез алгоритмов интегрального виртуального управления для уменьшения ошибки слежения, вызванной несимметричным дребезгом, при управлении каскадной системой.

## 2. Основной результат

Рассмотрим задачу слежения для линейной каскадной системы в условиях параметрической неопределенности. Желаемая траектория выходного каскада задается эталонной моделью. Синтезируем алгоритмы виртуального управления выходным каскадом с использованием интегральной составляющей. В МСБГ с ИВУ расширяется размерность выходного каскада за счет добавления интегратора и формируется информационный выход выходного каскада как линейная комбинация ошибки слежения и ее производных [2,3]. Обратная связь по информационному выходу формирует контуры как виртуального управления, так и управления замкнутой системой.

Синтезируем виртуальное управление в форме обратной связи по информационному выходу, а управление замкнутой системой в форме обратной связи по отклонению от поверхности скольжения. Продемонстрируем повышение точности на примере стабилизации линейной каскадной системы второго порядка с несимметричным дребезгом.

## 3. Пример

Не уменьшая общности, продемонстрируем применение предложенных алгоритмов для задачи стабилизации линейного каскадного объекта второго порядка при известных параметрах. Объект управления:  $\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ ,  $\dot{x}_2 = u$ . Целью управления является стабилизация выходного каскада с фазовой координатой  $x_1$  и ограниченность переменной  $x_2$ . Проведем синтез на основе МСБГ при известных параметрах выходного каскада тремя способами. Введем отклонение от многообразия в виде:  $\sigma = x_2 - x_{2\text{virt}}$ , где  $x_{2\text{virt}}$  — виртуальное управление выходным каскадом.

1. МСБГ с виртуальным П-управлением [1]:  $x_{2\text{virt}} = \theta x_1$ ,  $u = -\gamma_m \cdot \text{sign}(\sigma)$ .

Расширим размерность выходного каскада  $\dot{x}_{2\text{virt}} = v$  и сформируем информационный выход:  $y = (a_{11} + g_0)x_1 + a_{12}x_{2\text{virt}}$ .

2. МСБГ с ИВУ [2,3]:  $v = -\gamma \text{sign}(y) + \gamma_m \text{sign}(\sigma)$ ,  $u = -\gamma \cdot \text{sign}(y)$ .

3. Предложим модификацию МСБГ с добавлением интегральной составляющей в виртуальное управление:  $v = -\gamma \text{sign}(y)$ ,  $u = -\gamma_m \text{sign}(\sigma)$ . Проведем компьютерное моделирование системы с тремя алгоритмами с интервалом переключения  $h=0,001$  с параметрами  $a_{11} = 10$ ,  $a_{12} = 10$ ,  $x_1(0) = 0, 2$ ,  $x_2(0) = -0, 1$ ,  $g_0 = 10$ ,  $\gamma = 10$ ,  $\gamma_m = 20$ ,  $\theta = -1, 2$  (рис. 1).

Из рис. 1 видно, что во всех случаях дребезг несимметричный. Величины положительного и отрицательного отклонений от поверхности

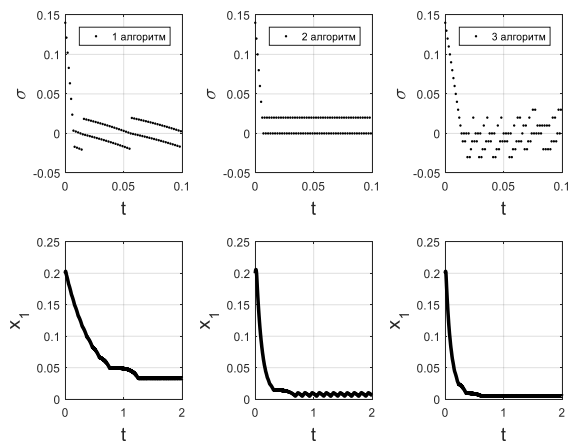


Рис. 1: Отклонение от многообразия и выходная координата каскадной системы с алгоритмами управления

скольжения зависят от начальных условий и внешних воздействий и заранее не прогнозируются. Время достижения поверхности скольжения одинаково. Статическая ошибка уменьшается при применении алгоритмов интегрального виртуального управления.

#### 4. Заключение

Предложенный алгоритм обеспечивает уменьшение ошибки стабилизации в несимметричном скользящем режиме без уменьшения интервала переключения. Обоснованием уменьшения статической ошибки являются свойства интегрального управления. На основе МСБГ и его модификаций можно уменьшить ошибку в задаче слежения, в том числе в условиях параметрической неопределенности.

#### Список литературы

1. Мышляев Ю.И. Алгоритмы скоростного биградиента // Тр. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014), Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 2320–2331.
2. Мышляев Ю.И., Нгуен Т.Т., Финошин А.В. Непрямое адаптивное управление каскадными системами с интегральным виртуальным алгоритмом // Автоматизация. Современные технологии. 2018. Т. 72. № 9. С. 921–927.

3. *Nguyen C.T., Finoshin A.V.* Indirect Model Reference Adaptive Control of Cascade Systems Based on the Speed-Bigradient Method // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2025. V. 26. № 4. P. 167–177.

### **Sliding Mode Control of the Cascade Systems with the Asymmetrical Chattering**

*A. V. Finoshin, T. V. Provotorov*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
earlov@gmail.com, timofeyprovotorov.7a@mail.ru

The control design of the cascade systems consisting of two subsystems based on the Speed-bigradient method is considered. The integral virtual control algorithm of the output subsystem for reducing the tracking error caused by the asymmetrical chattering is proposed. The decrease of the stabilization error by virtue of an integral virtual control is demonstrated.

---

УДК 539.3

### **Ускоренная сходимоть решений нелинейных систем к положению равновесия за фиксированное время**

*И. Б. Фуртат, С. А. Вразжевский*

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия  
cainenash@mail.ru, vrazhevskij.s@gmail.com

Предложено условие ускоренной сходимости за фиксированное время решений нелинейных динамических систем для которых выполнены специальные условия на производную от квадратичной функции, вычисленной вдоль решений системы. Обсуждаются условия сходимости решений за фиксированное время в заданную область и к нулю. Для достижения ускоренной сходимости используется отрицательный показатель в правой части производной квадратичной функции на определенном участке эволюции системы.

*Ключевые слова:* сходимоть за фиксированное время, управление, метод бэкстепинга, функция Ляпунова.

## 1. Введение

Вопрос устойчивости за конечное время (в англоязычной литературе «finite time stability») впервые обсуждался в основополагающих публикациях [1,2], где в частности предлагалось использовать кусочно-постоянные законы управления на базе знаковой функции. При использовании таких законов управления на практике возникают высокочастотные колебания с большой амплитудой в регулирующем сигнале из-за чаттеринга, связанного с наличием помех в канале измерения, запаздывания, использованием приближенных вычислений и аппроксимаций, и т.п.

К настоящему времени в области разработки законов управления, стабилизирующих систему за конечное время, проделана большая работа, где предложены эффективные алгоритмы со скручиванием (от англ. “twisting”) и суперскручиванием (от англ. “supertwisting”), а также алгоритмы, основанные на свойствах однородности дифференциальных уравнений [3–5], и это лишь некоторые из них. Здесь для стабилизации системы используются непрерывные законы управления, что исключает большие по амплитуде колебания в условиях чаттеринга.

Если обозначить за  $T$  время после которого все решения динамической системы равны нулю (от англ. “settling-time”) и  $x_0$  — начальные условия данной системы, то в [3–5] выполняется условие сходимости за конечное время в виде  $T(x_0) < \infty$ .

В отличие от [3–5], в [6] предложены решения, гарантирующие сходимость решений к положению равновесия за фиксированное время (от англ. “fixed-time stability”), т.е. существует  $T_{\max} > 0$  такое, что для любых  $x_0$  выполнено  $T(x_0) \leq T_{\max}$ .

В данной статье будут предложены условия, гарантирующие ускоренную сходимость за фиксированное время, что позволяет уменьшить значение  $T_{\max}$  по сравнению с [6]. Рассмотрены два условия: ускоренная сходимость за фиксированное время в заданное множество и к нулю.

## 2. Основной результат

Рассмотрим систему

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $f : [0; +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — нелинейная функция, которая может быть разрывной. Решение уравнения (1) понимаются в смысле Филиппова [7]. Предположим, что начало координат является точкой равновесия уравнения (1).

**Лемма 1.** Если существует непрерывная радиально неограниченная положительно-определенная функция  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty)$  такая, что любое решение  $x(t)$  системы (1) удовлетворяет неравенству (2)

$$\mathcal{D}^+V(x(t)) \leq \begin{cases} - \left[ \alpha V^p(x(t)) + \frac{\beta}{V^q(x(t))} e^{-\frac{\gamma}{V^r(x(t))}} \right]^k, & V(x(t)) > 0, \\ 0, & V(x(t)) = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r, k$  — положительные числа и  $pk > 1$ , тогда множество

$$(3) \quad \mathcal{M} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq V^{-1} \left( \sqrt[k]{\frac{k\gamma}{\ln(C)}} \right), C > 1 \right\}$$

является глобально притягивающим за фиксированное время с оценкой сверху на время сходимости

$$(4) \quad T_{\max} := \frac{1}{\alpha^k (pk-1)} + \frac{C}{\beta^k (qk+1)}$$

для любых начальных условий  $x(0)$ , а также  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Здесь

$$\mathcal{D}^+ \text{ означает верхнюю правую производную функции } \phi(t): \mathcal{D}^+ \phi(t) := \limsup_{h \rightarrow +0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h}.$$

**Лемма 2.** Если существует непрерывная радиально неограниченная положительно-определенная функция  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; +\infty)$  такая, что любое решение  $x(t)$  системы (1) удовлетворяет неравенству

$$(5) \quad \mathcal{D}^+V(x(t)) \leq - \left[ \alpha V^p(x(t)) + \beta V^{-q \cdot 1(1-V) + (q+r) \cdot 1(w-V)}(x(t)) \right]^k,$$

где  $\alpha, \beta, p, q, w, r, k$  — положительные числа,  $pk > 1$  и  $rk < 1$ , тогда система (1) является глобально устойчивой за фиксированное время, где оценка сверху на время сходимости  $x(t)$  к 0 для любых начальных условий  $x(0)$  имеет вид

$$(6) \quad T_{\max} := \frac{1}{\alpha^k (pk-1)} + \frac{1-w^{1+qk}}{\beta^k (1+qk)} + \frac{w^{1-rk}}{\beta^k (1-rk)}.$$

Здесь  $1(c-V)$  — функции Хевисайда:  $1(c-V) := \begin{cases} 0, & V < c, \\ 1, & V \geq c. \end{cases}$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (Проект № 25-19-20075), <https://rscf.ru/project/25-19-20075/> в ИПМаш РАН.

### Список литературы

1. *Zubov V.* Methods of A.M. Lyapunov and Their Applications. Groningen, The Netherlands: Popko Noordhoff, 1964.
2. *Utkin V.I.* Sliding Modes in Optimization and Control Problems. NY: Springer, 1992.
3. *Емельянов С.В. , Коровин С.К., Левантовский Л.В.* Скользящие режимы второго порядка при управлении неопределенными системами // Известия АН СССР. Техн. Кибернетика. 1986. № 1. С. 112–118.
4. *Orlov Y.* Discontinuous Systems: Lyapunov Analysis and Robust Synthesis Under Uncertainty Conditions. London, UK: Springer, 2009.
5. *Utkin V.I., Poznyak A.S.* Adaptive Sliding Mode Control With Application to Super-Twist Algorithm: Equivalent Control Method // Automatica. 2013. V. 49. No. 1. P. 39–47.
6. *Polyakov A.* Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 8. P. 2106–2110.
7. *Филлипов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

### Accelerated Convergence of Solutions of Nonlinear Systems to the Equilibrium Position in a Fixed Time

*I. B. Furtat, S. A. Vrazhevsky*

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia  
cainenash@mail.ru, vrazhevskij.s@gmail.com

A condition for accelerated convergence in a fixed time for solutions of nonlinear dynamic systems is proposed, for which special conditions are satisfied on the derivative of a quadratic function calculated along the system's solutions. Conditions for convergence of solutions in a fixed time to a given region and to zero are discussed. To achieve accelerated convergence, a negative exponent on the right-hand side of the derivative of the quadratic function is used over a specific segment of the system's evolution.

---

## **Дивергентный метод в задачах управления, исследования устойчивости и колебаний с применением к управлению мехатронными системами и объектами в нефтегазодобывающей промышленности**

*И. Б. Фуртат, П. А. Гущин*

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия  
cainenash@mail.ru, guschin.p@mail.ru

Доклад посвящен развитию дивергентного метода исследования устойчивости автономных и неавтономных динамических систем. Будет показано, что необходимые условия устойчивости в рамках данного метода принимают форму классического уравнения непрерывности. Для анализа устойчивости вводится понятие функции плотности. На ее основе с помощью дивергентного метода получены новые достаточные условия устойчивости. Затем дивергентный метод и функция плотности применяются для решения задачи синтеза законов управления. Посредством соответствующего выбора функции плотности можно формировать плотность фазового пространства, обеспечивая выполнение заданных ограничений на регулируемые переменные. В докладе будут представлены обобщения теоремы Бендиксона и критерия Дюлака (об отсутствии замкнутых траекторий) с двумерного случая на фазовое пространство произвольной размерности. Также будет показано применение дивергентного метода к анализу устойчивости в задаче Андронова–Вышнеградского и к проблеме поиска скрытых колебаний. Дивергентный метод будет рассмотрен к управлению мехатронными системами и объектами в нефтегазодобывающей промышленности.

*Ключевые слова:* устойчивость, управление, дивергенция, теорема Бендиксона, критерий Дюлака, задача Андронова–Вышнеградского.

### **1. Введение**

Методы исследования устойчивости динамических систем на базе свойств дивергенции вектора фазовой скорости объекта являются альтернативными методу функций Ляпунова. Одними из первых основополагающих работ в направлении получения дивергентных условий устойчивости были труды [1–3].

Результаты, предложенные в докладе, будут тесно связаны с работами В.П. Жукова и А. Рантцера. Несмотря на то, что в западной литературе нередко первенство в исследовании устойчивости с помощью

дивергенции вектора фазовой скорости отдается А. Рантцеру [4, 5], в отечественной литературе подобные идеи были опубликованы ранее В.П. Жуковым в [6]. В [6] исследуется неустойчивость решения нелинейного дифференциального уравнения с помощью дивергенции векторного поля. Затем в течение примерно 30 лет по исследованию неустойчивости различного вида динамических систем В.Н. Жуковым опубликован цикл работ, с частью которых можно свободно ознакомиться на сайте журнала «Автоматика и телемеханика». В [7] получены условия устойчивости для систем второго порядка. Затем А. Рантцер в работах [4, 5] обсуждает сходимость почти всех решений нелинейных динамических систем произвольного порядка и рассматривает вопросы синтеза закона управления. Подход [4, 5] отличается от подходов [7] тем, что для исследования устойчивости в [4, 5] используется функция плотности, которая подобна обратной вспомогательной функции в [7], за исключением их свойств в точке равновесия динамической системы.

## 2. Основной результат

Доклад посвящен развитию дивергентного метода исследования устойчивости автономных и неавтономных динамических систем [9]. Будет показано, что необходимые условия устойчивости в рамках данного метода принимают форму классического уравнения непрерывности. Для анализа устойчивости вводится понятие функции плотности. На ее основе с помощью дивергентного метода получены новые достаточные условия устойчивости.

Затем дивергентный метод и функция плотности применяются для решения задачи синтеза законов управления. Посредством соответствующего выбора функции плотности можно формировать плотность фазового пространства, обеспечивая выполнение заданных ограничений на регулируемые переменные [10].

В докладе будут представлены обобщения теоремы Бендиксона и критерия Дюлака (об отсутствии замкнутых траекторий) с двумерного случая на фазовое пространство произвольной размерности. Также будет показано применение дивергентного метода к анализу устойчивости в задаче Андронова–Вышнеградского и к проблеме поиска скрытых колебаний [11].

Дивергентный метод будет рассмотрен к решению следующих практических задач:

- управление вибрационной установкой с гарантией нахождения частоты колебаний в заданных пределах;

- управления шаговыми двигателями в мехатронных элементах космических аппаратов для снижения внутренних колебаний при движении данных элементов;
- управления процессом газлифтной эксплуатации нефтяных скважин с гарантией заданного дебита нефти;
- управление погружным насосом в нефтяных скважинах с ограничениями на режимы работы насоса и гарантией заданного дебита нефти.

Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № FFNF-2024-0008 (№ 124041100006-1 в ЕГИСУ НИОКТР).

### Список литературы

1. *Zaremba S.K.* Divergence of vector fields and differential equations // Amer. Journal of Math. 1954. V. LXXV. P. 220–234.
2. *Fronteau J.* Le théorème de Liouville et le problème général de la stabilité. Genève: CERN, 1965.
3. *Brauchli H.I.* Index, Divergenz und Stabilität in Autonomen Systemen. Zürich: Abhandlung Verlag, 1968.
4. *Rantzer A., Parrilo P.A.* On Convexity in Stabilization of Nonlinear Systems // Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney, Australia. 2000. P. 2942–2946.
5. *Rantzer A.* A Dual to Lyapunov's Stability Theorem // Systems & Control Letters. 2001. V. 42. P. 161–168.
6. *Жуков В.П.* Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1978. № 6. С. 11–15.
7. *Жуков В.П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // АиТ. 1999. № 7. С. 34–43.
8. *Жуков В.П.* К методу источников для исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. 1979. № 3. С. 12–17.
9. *Фуртат И.Б., Гуцун П.А.* Методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления при наличии возмущений и запаздывания. Ижевск: ИКИ, 2021.
10. *Furtat I.B.* Analysis and Control of Perturbed Density Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2026. 3621943.
11. *Furtat I.B, Kuznetsov N.V.* Divergence Method to Stability Study of Andronov-Vyshnegradsky Problem. Hidden Oscillations // ArXiv.org. 2025. arXiv: 2512.20418v1.

**Divergent Method in Control Problems, Stability and  
Oscillation Studies With Application to the Control of  
Mechatronic Systems and Objects in the Oil and Gas Industry**

*I. B. Furtat, P. A. Gushchin*

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of  
Sciences, Russia

cainenash@mail.ru, gushchin.p@mail.ru

This report is devoted to the development of a divergence method for studying the stability of autonomous and non-autonomous dynamic systems. It will be shown that the necessary stability conditions within this method take the form of a classical continuity equation. For stability analysis, the concept of a density function is introduced. Based on this, new sufficient stability conditions are derived using the divergence method. The divergence method and the density function are then applied to solving the problem of synthesizing control laws. By appropriately choosing the density function, it is possible to form a phase space density, ensuring the satisfaction of specified constraints on the controlled variables. The report will present generalizations of Bendixson's theorem and Dulac's criterion (on the absence of closed trajectories) from a two-dimensional case to a phase space of arbitrary dimension. The report will also demonstrate the application of the divergence method to stability analysis in the Andronov-Vyshnegradskii problem and to the problem of detecting hidden oscillations. The divergence method will be applied to the control of mechatronic systems and objects in the oil and gas industry.

---

## Синтез ПИД-регулятора с апериодическим фильтром как задача оптимизации

*М. В. Хлебников*

ИПУ РАН, Москва, Россия  
khlebnik@ipu.ru

Предлагается новый подход к задаче настройки параметров ПИД-регулятора с апериодическим фильтром, основанный на сведении исходной проблемы к задаче оптимизации. Выписан градиентный метод для отыскания параметров регулятора.

*Ключевые слова:* линейная система, ПИД-регулятор с апериодическим фильтром, уравнение Ляпунова, градиентный метод

В цикле работ Б.Т. Поляка и его коллег [1–4], посвященных синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации, был развит подход, который позволяет конструктивно решать задачи настройки и оптимизации параметров регулятора и предоставляет «хорошие» по обычным инженерным показателям регуляторы. В настоящем докладе этот подход обобщается на случай ПИД-регуляторов с апериодическим фильтром.

Рассмотрим SISO-систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

с состоянием  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $y(t) \in \mathbb{R}$  и управлением  $u(t) \in \mathbb{R}$ . Целью является определение параметров  $q, k_p, k_i, k_d$  ПИД-регулятора

$$(2) \quad \dot{u}(t) + qu(t) = -k_p y(t) - k_i \int_0^t y(\tau) d\tau - k_d \dot{y}(t)$$

с апериодическим фильтром, который доставляет замкнутой системе степень устойчивости  $\sigma > 0$  и минимизирует функционал

$$(3) \quad J = \mathbb{E}_{x(0)} \int_0^{\infty} y^2(t) dt.$$

Пусть начальные условия  $x(0)$  распределены с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\Sigma$ .

Введем вспомогательную скалярную переменную  $\xi$  из расчета  $\dot{\xi} = y$  с  $\xi(0) = 0$ . При этом согласно (1), (2)

$$\dot{u} + (q + k_d c^T b)u = -(k_p c^T + k_d c^T A)x - k_i \xi.$$

Относительно расширенного вектора состояния  $g = (x \ \xi \ u)^T \in \mathbb{R}^{n+2}$  замкнутая система представима в виде

$$\dot{g} = A_r g \doteq (A_0 + k_p A_p + k_i A_i + k_d A_d + k_q A_q)g,$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & b \\ c^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c^T & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c^T A & 0 & -c^T b \end{pmatrix}, \quad A_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы гарантировать степень устойчивости  $\sigma > 0$  замкнутой системы, введем в ее матрицу аддитивную компоненту  $\sigma I$ :

$$(4) \quad \dot{g} = (A_r + \sigma I)g.$$

В силу  $x = \{I \ 0 \ 0\}g$  начальные условия  $g(0) = (x_0 \ 0 \ 0)^T$  для системы (4) распределены с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\text{diag}\{\Sigma \ 0 \ 0\}$ . По лемме Беллмана для системы (4) имеем:

$$(5) \quad J = \mathbb{E}_{\sim x(0)} \int_0^\infty y^2(t) dt = \mathbb{E}_{\sim g(0)} \int_0^\infty g^T(t) \begin{pmatrix} cc^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g(t) dt =$$

$$= \mathbb{E}_{\sim g(0)} g^T(0) Q g(0) = \text{tr} Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $Q \in \mathbb{S}^{n+2}$  — решение уравнения Ляпунова

$$(6) \quad (A_r + \sigma I)^T Q + Q(A_r + \sigma I) = -\text{diag}\{cc^T \ 0 \ 0\}.$$

Пусть известен регулятор  $k^0$ , стабилизирующий систему с заданным запасом устойчивости  $\sigma$ , т. е. такой, что матрица  $A_{k^0}$  гурвицева. При этом предположении задача (5)–(6) может быть далее решена градиентным методом.

Градиент для квадратичного функционала (5) выписывается явным образом. А именно, справедлив следующий результат.

**Лемма 1.** *Функция (5) определена на множестве стабилизирующих обратных связей  $k$ . На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями*

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial k_j} = \text{tr} Y Q A_j, \quad j \in \{p, i, d, q\},$$

где матрица  $Y$  является решением уравнения Ляпунова

$$A_r Y + Y A_r^T = -\text{diag}\{\Sigma \quad 0 \quad 0\}.$$

Как показывают многочисленные примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей ко вполне удовлетворительным ПИД-регуляторам.

Результат, представленный леммой 1, получен за счет средств Российского научного фонда (Проект № 25-29-20062), <https://rscf.ru/project/25-29-20062/>.

### Список литературы

1. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optim. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
2. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // АиТ. 2022. № 11. С. 62–82.
4. *Хлебников М.В.* Подавление внешних возмущений в дискретной системе управления как задача оптимизации // АиТ. 2023. № 10. С. 104–117.

## Tuning PID Controller With an Aperiodic Filter as an Optimization Problem

*M. V. Khlebnikov*

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Russia  
khlebnik@ipu.ru

A new approach to the problem of tuning the parameters of a PID controller with an aperiodic filter is proposed, based on reducing the initial

problem to an optimization problem. A gradient method for finding the controller parameters is given.

---

УДК 531.36

**Периодические движения неавтономной гамильтоновой системы в случаях нулевой и целой или полуцелой частот предельной автономной задачи**

*О. В. Холостова*

МАИ (НИУ), Москва, Россия  
kholostova\_o@mail.ru

Построена теория периодических движений близкой к автономной,  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы в случаях, когда в предельной автономной задаче одна из частот нулевая, а другая целая или полуцелая. Исследованы резонансные периодические движения спутника (твёрдого тела) в окрестности его стационарного вращения на слабоэллиптической орбите.

*Ключевые слова:* гамильтонова система, резонанс, устойчивость, периодические движения, спутник, цилиндрическая прецессия

**1. Исследование периодических движений**

Исследуются движения  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального равновесия. Система зависит от трех параметров, один из параметров мал, и при его нулевом значении система автономна. Пусть начало координат фазового пространства — положение равновесия системы, и гамильтониан возмущенного (в его окрестности) движения содержит слагаемые только четных степеней относительно возмущений. Кроме того, неавтономная часть гамильтониана возмущенного движения в слагаемых нечетных и четных степеней  $n$  по малому параметру содержит соответственно только нечетные или только четные гармоники до  $n$ -й включительно. Такая структура гамильтониана характерна для многих задач классической и небесной механики.

Рассматриваются значения параметров (в трехмерном пространстве параметров) вблизи границы области устойчивости тривиального равновесия, соответствующей случаю нулевой частоты в предельном

автономном случае. Выделены точки на этой границе, для которых другая частота равна целому или полуцелому числу (т.е. в системе реализуется кратный параметрический резонанс), а ранг матрицы линейризованных уравнений возмущенного движения равен трем.

Для случаев, когда ненулевая частота равна  $1/2$ ,  $3/2$ ,  $1$  или  $2$ , описаны области параметрического резонанса тривиального равновесия системы, решен вопрос о существовании в его окрестности, числе и устойчивости (в линейном приближении) резонансных периодических движений, аналитических по целым или дробным степеням малого параметра. Ранее [1] аналогичные результаты для исследуемых резонансных случаев были получены в сечениях пространства параметров, соответствующих фиксированному (резонансному) значению одного из параметров. В докладе рассматриваются полные окрестности резонансных точек пространства параметров, что ожидаемо приводит к усложнению как картины устойчивости тривиального равновесия, так и распределения и характера устойчивости периодических решений.

Для каждого резонансного случая разработан алгоритм анализа исследуемых движений. Характер нелинейных колебаний системы определяется свойствами приближенных автономных (модельных) систем, получаемых в результате нормализации гамильтониана возмущенного движения. Положения равновесия модельных систем порождают периодические движения полных неавтономных систем. При этом модельные системы зависят от большого числа параметров (коэффициентов нормальной формы, и их исследование представляет значительную сложность.

Установлены различия и сходство свойств модельных систем для различных резонансных случаев, обнаружены параллели со случаями кратных резонансов другого типа, возникающих в системах с другой структурой возмущающей части гамильтониана.

## **2. Резонансные периодические движения спутника**

Рассматривается движение динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите, Движение происходит в окрестности стационарного вращения спутника вокруг нормали к плоскости орбиты (цилиндрической прецессии). Исследуются случаи, когда значения параметров задачи (инерционного параметра, безразмерной угловой скорости вращения и эксцентриситета орбиты центра масс) принадлежат малым окрестностям точек исследованных случаев кратного параметрического резонанса.

Показано, что в данной спутниковой задаче существует 10 резонансных точек. Подробно исследованы окрестности четырех точек, соответствующих значениям  $1/2$ ,  $3/2$ , 1 или 2 ненулевой частоты. Построены резонансные периодические движения спутника, аналитические по целым или дробным степеням малого параметра (эксцентриситета орбиты центра масс), описаны их бифуркации.

По сравнению с общей теорией, задача об устойчивости этих движений изучена в более полном объеме. Для случаев, когда ненулевая частота полуцелая, вопрос об устойчивости решен в строгой нелинейной постановке. Для случаев, когда ненулевая частота целая, проведен полный линейный анализ устойчивости, построены соответствующие диаграммы устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект № 24-11-00162) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

#### Список литературы

1. *Kholostova O.V.* On Periodic Motions of a Nonautonomous Hamiltonian System in One Case of Multiple Parametric Resonance // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2017. V. 13. No. 4. P. 477–504.
2. *Kholostova O.V.* On the Motions of a Nearly Autonomous Hamiltonian System at Parameter Values Close to the Boundary of Stability Regions of the Limiting Autonomous Problem // *Russ. J. Nonlin. Dyn.* 2025. V. 21. No. 4. P. 623–648.

### Periodic Motions of a Non-Autonomous Hamiltonian System in Cases of Zero and Integer or Half-Integer Frequencies of the Limit Autonomous Problem

*O. V. Kholostova*

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
kholostova\_o@mail.ru

The theory of periodic motions of a nearly autonomous,  $2\pi$ -periodic in time Hamiltonian system is developed in cases where, in the limit autonomous problem, one frequency is zero and the other is integer or half-integer. Resonant periodic motions of a satellite (rigid body) in the vicinity of its stationary rotation in a weakly elliptical orbit are investigated.

---

## Динамика управляемой многозвенной системы в жидкости

*А. А. Хорошева, Ф. Л. Черноусько*

ИПМех РАН, Москва, Россия

a.khorosheva@yandex.ru, chern@ipmnet.ru

Рассматривается динамика многозвенной системы в жидкости при различных законах сопротивления. Построены управляемые движения системы, включая периодические движения.

*Ключевые слова:* управляемая система, динамика, периодические движения

### 1. Введение

Динамика многозвенных управляемых систем, способных перемещаться в жидкой среде, представляет интерес как с точки зрения биомеханики, так и с точки зрения разработки мобильных плавающих роботов. Проблемы биомеханики плавания рыб и животных освещены в монографиях [1–4].

В данной работе рассматривается трехмассовая двухзвенная механическая система, управляемая при помощи момента сил, создаваемого двигателем в шарнире, и совершающая плоские движения в жидкости при различных законах сопротивления среды. Представлены некоторые продольные и поперечные движения системы. Построены периодические движения, оценена средняя скорость перемещения системы при периодических режимах.

### 2. Механическая система

Рассматриваемая система (см. рис. 1) состоит из материальной точки  $C_0$  массы  $m_0$  и двух твердых тел (звеньев) массы  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных цилиндрическим шарниром в точке  $C_0$ , где располагается двигатель, создающий управляющий момент  $N$ . Расстояния от точки  $C_0$  до центров масс звеньев  $C_1$  и  $C_2$  обозначим через  $a_1$  и  $a_2$ , а моменты инерции звеньев относительно точки  $C_0$  через  $J_1$  и  $J_2$ . В качестве обобщенных координат системы выберем декартовы координаты  $x, y$  точки  $C_0$  и углы  $\varphi_i$  между отрезками  $C_0C_i$  и осью  $x$ ,  $i = 1, 2$ . Уравне-

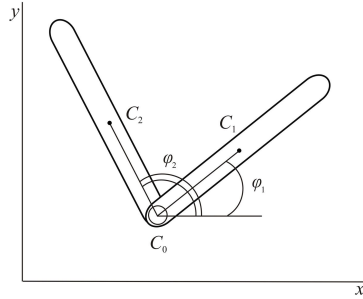


Рис. 1: Механическая система

ния Лагранжа рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x} - \sum_{i=1}^2 m_i a_i \left( \sin \varphi_i \ddot{\varphi}_i + \cos \varphi_i \dot{\varphi}_i^2 \right) &= \sum_{i=0}^2 F_{ix}, \\
 M\ddot{y} + \sum_{i=1}^2 m_i a_i \left( \cos \varphi_i \ddot{\varphi}_i - \sin \varphi_i \dot{\varphi}_i^2 \right) &= \sum_{i=0}^2 F_{iy}, \\
 J_1 \ddot{\varphi}_1 + m_1 a_1 (\cos \varphi_1 \ddot{y} - \sin \varphi_1 \ddot{x}) &= \\
 &= -F_{1x} a_1 \sin \varphi_1 + F_{1y} a_1 \cos \varphi_1 + N, \\
 J_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 a_2 (\cos \varphi_2 \ddot{y} - \sin \varphi_2 \ddot{x}) &= \\
 &= -F_{2x} a_2 \sin \varphi_2 + F_{2y} a_2 \cos \varphi_2 - N.
 \end{aligned}$$

Здесь  $M = m_0 + m_1 + m_2$ , а через  $F_{ix}$  и  $F_{iy}$  обозначены проекции на оси  $x, y$  внешних сил, в частности сил сопротивления, действующих на точки  $C_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . В качестве сил сопротивления рассматриваются силы, направленные против скорости точки и пропорциональные либо скорости, либо квадрату скорости точки.

### 3. Продольные и поперечные движения

Построены и проанализированы продольные и поперечные движения системы при линейном и квадратичном сопротивлении. Как при продольных, так и при поперечных движениях угол  $\varphi_2 - \varphi_1$  между звеньями совершает периодические колебания в окрестности  $\pi$ . Показано, что в результате определенных колебаний происходит стремление построенных движений к периодическим режимам.

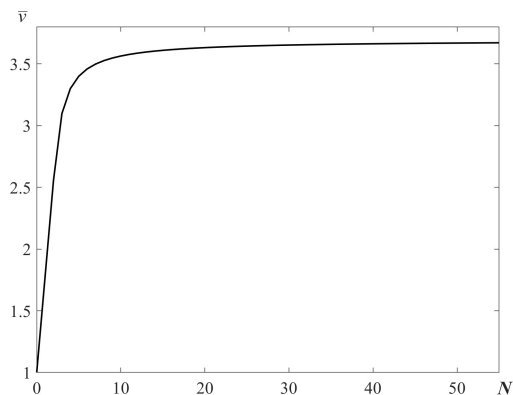


Рис. 2: Средняя скорость продольного движения в зависимости от числа циклов

При продольных движениях, имитирующих плавание рыб, двухзвенник перемещается вдоль оси  $x$ . На рис. 2 показано изменение средней скорости продольного движения в зависимости от числа циклов  $N$ .

Поперечные движения двухзвенника с одинаковыми звеньями имитируют греблю при помощи весел. Получены периодические режимы и построены движения, стремящиеся к периодическим. Оценены средние скорости продольных и поперечных движений в периодических режимах.

#### 4. Заключение

Построены управляемые движения двухзвенника в сопротивляющейся среде, имитирующие плавание и греблю. Оценены средние скорости движения при периодических режимах.

Работа выполнена в соответствии с госзаданием № 124012500443-0.

#### Список литературы

1. *Blake R.W.* Fish Locomotion. Cambridge: University Press, 1975.
2. *Lighthill J.* Mathematical Biofluidynamics. Philadelphia: SIAM, 1975.
3. *Грей Дж.* Передвижение животных. Москва, Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.
4. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022.

# Dynamics of a Controlled Multilink System in a Fluid

A. A. Khorosheva, F. L. Chernousko

IPMech RAS, Moscow, Russia

a.khorosheva@yandex.ru, chern@ipmnet.ru

Dynamics of a controlled multilink system in a fluid is considered under different resistance laws. Controlled motions of the system, including periodic ones, are obtained.

---

УДК 681.5.015

## К вопросу о использовании матрицы информации Фишера в адаптивной идентификации параметров линейных стационарных систем в присутствии гауссова шума

В. А. Чернов<sup>1,2</sup>, М. А. Каканов<sup>1</sup>

Центр Робототехники Сбера, Москва, Россия<sup>1</sup>

ИПМаш РАН, Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>

chernov\_valery@yahoo.com, kakanov.mikhail@gmail.com

В работе рассматривается вопрос использование матрицы информации Фишера для усовершенствования алгоритма получения оценки вектора неизвестных величин для параметрической идентификации линейных стационарных систем в присутствии гауссова шума.

*Ключевые слова:* наблюдатель, нелинейный регрессор, адаптация, матрица Фишера

### 1. Введение

В данной работе рассматривается задача параметрической идентификации линейных стационарных систем по линейному регрессионному уравнению в присутствии аддитивного гауссовского шума:

$$(1) \quad y(t) = m^T(t)\theta + \eta, \quad y(t) \in \mathbb{R}^1, \quad m(t) \in \mathbb{R}^q, \quad \theta \in \mathbb{R}^q, \quad \eta \sim N^q(0, \sigma).$$

Сама по себе задача идентификации вектора неизвестных параметров в линейной регрессии является хорошо изученной и имеет обширную базу для цитирования [1]. Известно, что для получения корректной оценки требуется выполнение условия незатухающих возбудений

(РЕ). В последние годы интерес исследователей заключается в ослаблении условия РЕ на регрессор. Наиболее обсуждаемыми методами получения оценки параметров без необходимости РЕ являются DREM [2] и GREVO [3].

Для ослабления требований к условию незатухающего возбуждения применяется динамическое расширение регрессора и смешивание (DREMподобная процедура), приводящее к скаляризованному регрессионному уравнению. Предлагается модификация закона адаптации, в которой коэффициент обновления нормируется (накопленной) информацией Фишера, вычисляемой по расширенному регрессору, что повышает робастность к шуму и снижает чувствительность к настройке параметров алгоритма.

## 2. Основной результат

В работе исследуется алгоритм идентификации вектора параметров системы (1), использующий расширение регрессора и обновление оценки неизвестного вектора по нелинейному закону, зависящему от матрицы информации Фишера от расширенного регрессора. Процедура расширения регрессора аналогична представленной в DREM:

$$Y_e = \begin{bmatrix} y(t) \\ H_1 y(t) \\ \vdots \\ H_{q-1} y(t) \end{bmatrix}, \quad \Phi_e = \begin{bmatrix} m(t) \\ H_1 m(t) \\ \vdots \\ H_{q-1} m(t) \end{bmatrix},$$

$$(2) \quad H_i = \frac{\alpha_i}{p + \beta_i},$$

$$Y_e = \Phi_e \theta,$$

$$z = \text{adj}\{\Phi_e\} Y_e,$$

$$\Delta = \det\{\Phi_e\}.$$

Это приводит нас к форме (3), в которой шум выступает неявным образом в расширенном регрессоре

$$(3) \quad z = \Delta \theta$$

Посчитаем матрицу информации Фишера относительно оцениваемого параметра

$$(4) \quad \mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta^T} \log f(\Phi_e; \theta) \right].$$

На основании (4) и (3) построим наблюдатель, обновляющий оценку неизвестного вектора независимо для каждой из его компонент с индексом  $i = \overline{1, q}$

$$(5) \quad \begin{aligned} K_i &= \frac{\Delta \mathcal{I}_i}{\lambda + \Delta^2 * \mathcal{I}_i + \epsilon_{\text{FIM}}} \\ e_i &= z_i - \Delta \hat{\theta}_i \\ \dot{\hat{\theta}}_i &= \gamma_i K_i e_i, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — некоторый коэффициент фильтрации накопленной информации,  $\gamma > 0$  — положительный коэффициент адаптации оценки.

Установлено, что использование матрицы информации Фишера в алгоритме адаптации параметров модели благоприятно сказывается как на качестве оценки, так и на чувствительности к шуму. Алгоритм адаптации при этом получается более робастным относительно параметров алгоритма получения оценки, чем его исходный вариант.

В качестве необходимого условия для сходимости алгоритма адаптации оценки в расширенном регрессионном уравнении выступает результат теоремы 1.

**Теорема 1.** *Если расширенный регрессор  $\Phi$  ограничен и дисперсия шума  $\eta$  конечна, то ошибка оценки параметров  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  остается ограниченной.*

Ключевым свойством алгоритма представляется удобство настроек его параметров, зависящих от конкретного вида регрессора  $m$  и шума  $\eta$  в исходной задаче (1).

**Теорема 2.** *При выполнении теоремы 1 и  $\lambda \approx 1$ , скорость сходимости оценки неизвестных параметров почти на всех шагах  $k$  алгоритма не зависит от дисперсии шума и равна*

$$\|\theta_k - \hat{\theta}_k\| = \mathcal{O}(k^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\log k}).$$

### 3. Заключение

В работе предложен алгоритм параметрической идентификации, в которой коэффициент обновления нормируется (накопленной) информацией Фишера, вычисляемой по расширенному регрессору, что повышает робастность к шуму и снижает чувствительность к настройке параметров алгоритма. Получены достаточные условия ограниченности ошибки оценки и оценка скорости сходимости.

#### Список литературы

1. Андреевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // *АиТ*. 2020. №. 9. С. 3–61.
2. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing // *IFAC-PapersOnLine*. 2016. V. 49. No. 13. P. 99–104.
3. Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D. Generalized Parameter Estimation-Based Observers: Application to Power Systems and Chemical–Biological Reactors // *Automatica*. 2021. V. 129. P. 109635.

### On the Application of Fisher’s Information Matrix in Adaptive Parameter Identification of Linear Stationary Systems in the Presence of Gaussian Noise

V. A. Chernov<sup>1,2</sup>, M. A. Kakanov<sup>1</sup>

Sber Robotics Centre, Moscow, Russia<sup>1</sup>

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian

Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia<sup>2</sup>

chernov\_valery@yahoo.com, kakanov.mikhail@gmail.com

In this paper, the application of Fisher’s information matrix to improve the algorithm for estimating the vector of unknown parameters for parametric identification of linear stationary systems in the presence of Gaussian noise.

---

## Принципиальное уточнение оценки предельно-достижимой точности систем с дискретными регуляторами

*В. Н. Честнов<sup>1</sup>, Ю. Ф. Орлов<sup>2</sup>*

ИПУ РАН, Москва, Россия<sup>1</sup>

ЭИ МПУ, Электросталь, Россия<sup>2</sup>

*vnchest@yandex.ru, yu\_orlov@mail.ru*

Устанавливается новая оценка величины возвратной разности систем с дискретными регуляторами, определяющая предельно-достижимую точность системы при типовых ступенчатых и гармонических возмущениях. Она целиком определяется свойствами объекта управления.

*Ключевые слова:* непрерывный объект, дискретный регулятор, предельная точность

### 1. Введение

Практика автоматического управления помимо устойчивости замкнутой системы предъявляет ряд дополнительных требований к качеству ее работы, называемые далее инженерными. К ним относятся: ошибки регулирования, определяющие точность работы системы при действии внешних возмущений; время регулирования, характеризующее ее быстродействие; показатели, определяющие запас устойчивости системы, например, запас устойчивости по фазе и коэффициенту усиления, либо радиус запасов устойчивости [1].

Рассмотрим полностью управляемую и наблюдаемую дискретную модель непрерывного объекта ( $n$  уравнений):

$$(1) \quad \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}[u(k) + f(k)],$$

$$(2) \quad y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k),$$

со статическим регулятором состояния:

$$(3) \quad u(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}(k).$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — состояние объекта,  $y$  — регулируемый выход,  $u$  — управление,  $f$  — внешнее возмущение, массивы чисел  $A$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{k}$  известны.

Регулируемая переменная и внешнее возмущение связаны в замкнутой системе соотношением [2]:

$$(4) \quad y(k) = \frac{w_o(z)}{1 + w_{\text{раз}}(z)} f(k),$$

где  $w_o(z) = \mathbf{c}^T(zI - A)^{-1}\mathbf{b}$  — передаточная функция объекта (1)–(2),  $w_{\text{раз}}(z) = -\mathbf{k}^T(zI - A)^{-1}\mathbf{b}$  — передаточная функция разомкнутой системы (1), (3) по управлению.

Требование устойчивости замкнутой системы с дискретным регулятором состояния заключается в принадлежности собственных значений матрицы замкнутой системы внутренности единичного круга с центром в начале координат. Для этого случая в работе [2] получена оценка на величину возвратной разности, определяющей предельно достижимую точность системы при ступенчатом и гармоническом возмущении. Для ступенчатого возмущения она имеет вид

$$(5) \quad |1 + k_{\text{раз}}| \leq 2^n / |d(1)|, \quad d(z) = \det(zI - A),$$

где коэффициент передачи разомкнутой системы:  $k_{\text{раз}} = w_{\text{раз}}(z)|_{z=1} = w_{\text{раз}}(e^{j\omega h})|_{\omega=0}$ , а  $h$  — период дискретности.

## 2. Основной результат

Практика автоматического управления показывает, что левая часть упомянутого выше единичного круга крайне не желательна для расположения собственных значений матрицы  $A_{\text{зам}} = A + \mathbf{b}\mathbf{k}^T$ . Поскольку даже одна пара комплексных собственных значений в этой области приводит к двухчастотным колебаниям регулируемой переменной [3]. По аналогичной причине исключаются чисто мнимые собственные значения. Если принять, что собственные значения замкнутой системы лежат в пересечении двух кругов радиуса 1 с центрами в начале координат и точке  $\text{Re } z = 1$  и  $\text{Im } z = 0$ , то многие области, построенные исходя из заданной степени устойчивости и заданной степени колебательности замкнутой дискретной системы будут заведомо принадлежать этой области комплексной плоскости корней. Тогда используя технику доказательства неравенства (5) из [2], можно показать, что будет выполняться неравенство.

$$(6) \quad |1 + k_{\text{раз}}| \leq 1/|d(1)|.$$

Таким образом, максимально возможная величина возвратной разности  $|1 + k_{\text{раз}}|$  на нулевой частоте определяется только свойствами объекта управления: расположением корней  $z_i$  характеристического полинома разомкнутой системы  $d(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ .

Аналогично, для гармонического внешнего возмущения, следуя [2], получаем

$$\left| 1 + w_{\text{раз}}(e^{j\omega h}) \right| \leq 1/|d(e^{j\omega h})|.$$

Используя неравенство (6) из (4) легко оценить предельную ошибку системы при ступенчатом возмущении  $f(k) = \text{const} = f^* > 0$  :

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) \right| \geq \left| \mathbf{c}^T \text{adj}(I - A) \mathbf{b} \right| f^*.$$

Аналогичное неравенство можно записать и для гармонического внешнего возмущения. Таким образом, предельно достижимая ошибка целиком определяется только свойствами объекта управления.

### 3. Заключение

В работе получены существенно более реалистичные оценки величины возвратной разности систем с дискретными регуляторами состояния, которые определяют предельно достижимую точность системы при типовых ступенчатых и гармонических внешних возмущениях. При этом предельно достижимая ошибка регулирования целиком и полностью определяется собственно объектом управления.

### Список литературы

1. *Честнов В.Н.* Фундаментальные особенности дискретных систем управления и достижимые инженерные показатели качества // Материалы 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). 2024. С. 75–79.
2. *Честнов В.Н.* Предельно достижимая точность линейных систем с дискретными регуляторами // *АиТ.* 2014. № 2. С. 193–214.
3. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб.: Питер, 2005.

## A Fundamental Refinement of the Assessment of the Maximum Achievable Accuracy of Systems With Discrete Controllers

*V. N. Chestnov<sup>1</sup>, Yu. F. Orlov<sup>2</sup>*

ICS RAS, Moscow, Russia<sup>1</sup>

EI MPU, Elektrostal, Russia<sup>2</sup>

vnchest@yandex.ru, yu\_orlov@mail.ru

A new estimate of the return difference value is established systems with discrete controllers, which determines the maximum achievable accuracy of the system under typical step and harmonic disturbances. It is entirely determined by the properties of the control object.

## Анализ робастной устойчивости линейной системы второго порядка с матрицей в сопровождающей форме

Д. В. Шатов<sup>1,2</sup>

ИПУ РАН, Москва, Россия<sup>1</sup>  
МФТИ, Долгопрудный, Россия<sup>2</sup>  
dvshatov@ipu.ru

Решается задача анализа робастной устойчивости линейной системы второго порядка с матрицей  $A$  в сопровождающей форме. В основе исследования лежит известный алгебраический подход, позволяющий проверить существование общей квадратичной функции Ляпунова (ОКФЛ) для двух систем с матрицами в сопровождающей форме. С помощью указанного результата для произвольной фиксированной матрицы  $A$  строится множество матриц той же структуры таких, что у соответствующих систем существует ОКФЛ.

*Ключевые слова:* линейная система, сопровождающая форма матрицы, робастная устойчивость, общая квадратичная функция Ляпунова

### 1. Введение

В статье [1] доказан следующий результат. [1, **Теорема 3.1**]: необходимым и достаточным условием существования ОКФЛ для двух линейных систем  $\dot{x} = Ax$  и  $\dot{x} = Bx$  при  $B = A - gh^\top$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $h, g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , где  $A$  и  $B$  в сопровождающей форме, является: (а) — гурвицевость  $A$  и  $B$  и (б) — отсутствие у произведения  $AB$  отрицательных вещественных собственных чисел.

Далее этот результат используется для робастного анализа системы  $\dot{x} = Ax$  в следующей постановке: для заданной гурвицевой матрицы  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  в сопровождающей форме найти множество матриц  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  той же структуры, для которых выполняются условия (а), (б) приведенной теоремы 3.1.

### 2. Основной результат

Рассмотрим матрицы  $A$  и  $B \in \mathcal{B}$ , записанные в сопровождающей форме:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Для выполнения условия (а) — гурвицевости  $A$  и  $B$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось  $a_0 < 0$ ,  $a_1 < 0$ ,  $b_0 < 0$ ,  $b_1 < 0$ .

Собственные числа матрицы  $AB$  находятся из решения уравнения

$$\det(sI - AB) = s^2 - (a_0 + b_0 + a_1 b_1)s + a_0 b_0 = 0,$$

и равны

$$(1) \quad s_{1,2} = (S \pm \sqrt{D})/2,$$

где  $S = a_0 + b_0 + a_1 b_1$  и  $D = (a_0 + b_0 + a_1 b_1)^2 - 4a_0 b_0$ .

Для выполнения теоремы 3.1 достаточно  $D < 0$ , т.е. условия

$$(a_0 + b_0 + a_1 b_1)^2 - 4a_0 b_0 < 0.$$

Это условие можно представить с помощью квадратичной функции

$$\mathcal{D}(b_0, b_1) = b_0^2 + 2a_1 b_0 b_1 + a_1^2 b_1^2 - 2a_0 b_0 + 2a_0 a_1 b_1 + a_0^2,$$

как  $\mathcal{D}(b_0, b_1) < 0$ . Ему удовлетворяют  $b_0$  и  $b_1$ , лежащие в

$$\mathcal{C}_0 = \text{int } \mathcal{D}(b_0, b_1).$$

**Лемма 1.** *Решение  $\mathcal{D}(b_0, b_1) = 0$  является параболой, которая лежит в 3-м квадранте плоскости  $(b_0, b_1)$  и касается осей  $b_0$  и  $b_1$  в точках  $(b_0 = a_0, b_1 = 0)$  и  $(b_0 = 0, b_1 = -a_0/a_1)$  и разбивает квадрант на 4 множества:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_I &= \{(b_0, b_1)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : b_0 < a_0 - a_1 b_1 - 2\sqrt{-a_1 b_1 a_0}, b_1 < 0\}, \\ \mathcal{C}_{II} &= \{(b_0, b_1)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : b_0 > a_0 - a_1 b_1 + 2\sqrt{(-a_1 b_1 a_0)}, b_1 > -a_0/a_1\}, \\ \mathcal{C}_{III} &= \{(b_0, b_1)^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : b_0 > a_0 - a_1 b_1 + 2\sqrt{-a_1 b_1 a_0}, b_1 < -a_0/a_1\}. \end{aligned}$$

Для полного описания множества  $\mathcal{B}$  требуется проверить условие (б) теоремы 3.1 ( $\text{Re}\{s_{1,2}\} > 0$ ,  $\text{Im}\{s_{1,2}\} = 0$ ) для множеств  $\mathcal{C}_I, \mathcal{C}_{II}, \mathcal{C}_{III}$ .

**Лемма 2.** *Условия теоремы 3.1 выполняются для  $\mathcal{C}_{III}$ .*

Таким образом из лемм 1 и 2 следует, что область робастной устойчивости матрицы  $A$  является  $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_{III}$ . Для  $A$  и любой матрицы  $B \in \mathcal{B}$  с элементами  $b_0$  и  $b_1$  из указанного объединения существует ОКФЛ.

### 3. Пример

Выберем элементы матрицы  $A$  как  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = -2$ . На рис. 1 показана область робастной устойчивости для этой матрицы, а также

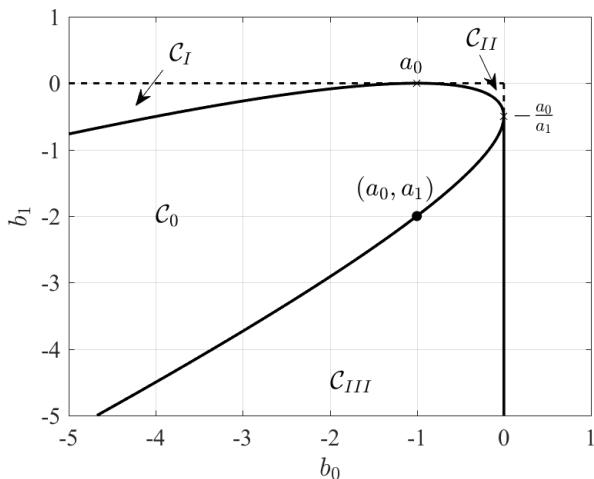


Рис. 1: Область робастной устойчивости для матрицы  $A$  с элементами  $a_0 = -1$ ,  $a_1 = -2$

парабола  $\mathcal{D}(b_0, b_1) = 0$  и точки ее пересечения с осями  $b_0$ ,  $b_1$ ; множества  $\mathcal{C}_\alpha$ ,  $\alpha \in \{I, II, III\}$  и отмечена точка  $(a_0, a_1)$ .

Отметим, что структура разбиения 3-го квадранта на области, изображенная на рис. 1, сохраняется при любых  $a_0 < 0$ ,  $a_1 < 0$ , т.е. при гурвицевой  $A$ .

Результаты исследований, представленные в разделе 2, получены за счет средств Российского научного фонда (Проект № 21-71-30005-П), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>.

### Список литературы

1. Shorten R.N., Narendra K.S. On Common Quadratic Lyapunov Functions for Pairs of Stable LTI Systems Whose System Matrices Are in Companion Form // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. No. 4. P. 618–621.

# Robust Stability Analysis of a Second-Order Linear System With a Matrix in Companion Form

*D. V. Shatov*<sup>12</sup>

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia<sup>1</sup>  
Moscow Inst. of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russia<sup>2</sup>  
dvshatov@ipu.ru

This paper addresses the robust stability analysis of a second order linear system with a matrix  $A$  in companion form. The study employs a well-known algebraic condition for the existence of a common quadratic Lyapunov function (CQLF) for two such systems. Using this result, for an arbitrary fixed matrix  $A$ , we construct a family of matrices of the same structure that admit a CQLF with  $A$ .

---

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Александров А.Ю.	10	Голубев А.Е.	101 104
Амбросовская Е.Б.	311	Голубев Ю.Ф.	107
Ананьев Б.И.	12	Гребнева О.А.	47
Ананьевский И.М.	16	Грезнев П.П.	111
Андреев А.С.	19	Гусев М.И.	114
Антоновская О.Г.	22	Гутник С.А.	118
Ардентов А.А.	25 363	Гущин П.А.	384
Арутюнов А.В.	28	Данг Т.Д.	122
Арцибасов А.В.	31	Девяткин Д.Д.	126
Байков А.Е.	35	Девяткин Е.Д.	126
Баландин Д.В.	155 353	Долгий Ю.Ф.	129
Барабанов И.Н.	38	Дорофеев С.В.	132
Барахтенко Е.А.	41	Досаев М.З.	135 237
Баринов А.М.	152	Дружинина О.В.	321
Барсегян В.Р.	43 47	Дударенко Н.А.	360
Беличенко М.В.	50	Егоров А.В.	139
Белов И.Р.	349	Елсаков А.П.	143
Берлин Л.М.	54	Жуковская З.Т.	28
Бесклубная А.В.	22	Жуковский С.Е.	28
Бирюков Р.С.	57 60	Зайцев В.А.	146
Болотник Н.Н.	64 67	Ибрагимов Д.Н.	290
Бортакровский А.С.	71	Иванюхин А.В.	149 196
Бубнова Е.С.	57	Измestьев И.В.	152 222
Буданов В.М.	74	Исаева Д.И.	155
Буранов Ж.И.	19	Каканов М.А.	397
Бурдилова В.В.	77	Каленова В.И.	159
Буров А.А.	80	Каменецкий В.А.	163
Бутырин С.А.	337 340	Канатников А.Н.	166
Видов Н.М.	83	Кандрина А.Д.	324
Виноградова М.С.	166	Каратов Р.Б.	169
Влахова А.В.	86	Климина Л.А.	93 98
Вражевский С.А.	89 380	Коган М.М.	60
Галяев А.А.	293	Кожевников И.Ф.	173
Гарбуз М.А.	93	Кокунько Ю.Г.	226
Глушченко А.И.	210 214	Конг Ч.Х.	233
Голованов С.А.	98	Корнеев В.А.	64

Королев В.С.	176	Орёл Н.А.	269
Корянов В.В.	107	Орлов Ю.В.	273
Косинов Н.А.	179	Орлов Ю.Ф.	401
Косов А.А.	182	Паламарчук Е.С.	169
Костин Г.В.	185	Петров А.Г.	276
Кочетков С.А.	189	Петров М.М.	279
Кошелев А.А.	193	Петров Н.А.	50
Кравченко В.С.	196	Петров Н.Н.	283
Красинский А.Я.	199	Платонов А.В.	286
Краснов Д.В.	203	Подгорная В.М.	290
Краснова С.А.	111	Поляхова Е.Н.	176
Крищенко А.П.	77 207	Потапов А.П.	293
Круглов А.М.	344	Потоцкая И.Ю.	176
Кугушев Е.И.	193	Привалова О.Г.	318
Кузнецов П.К.	337 340	Провоторов Т.В.	377
Кулешов А.С.	83	Прокофьев Е.А.	41
Ласточкин К.А.	210 214	Проскурников А.В.	143 311
Ле Д.Н.	218	Пупышева Ю.Ю.	176
Ли Л.Г.	226	Пыркин А.А.	218 233
Ливанов Н.Д.	222	Рассадин Ю.М.	273
Локшин Б.Я.	318	Решмин С.А.	31
Ломов А.А.	229	Родников А.В.	297
Лонг Х.Д.	233	Рожнов А.В.	314
Лу С.	237	Ролдугин Д.С.	300
Майоров А.Ю.	35	Рюмина К.А.	304
Макиева Э.И.	86	Рябикова Т.В.	353
Маковеева П.Е.	240	Рябов П.Е.	307
Максименко М.В.	244	Савин Н.А.	311
Максимова И.С.	179	Саломатин А.А.	314
Маркова Е.В.	41	Самсонов В.А.	98 318
Маштаков А.П.	247	Седова Н.О.	321
Маштаков Я.В.	300	Сергеев А.И.	89
Моржин О.В.	251	Сесекин А.Н.	129 324
Морозов В.М.	159	Скрипов Е.А.	152
Морозов М.В.	254	Славеснов Л.А.	327
Морозов Ю.В.	257	Смирнова В.Б.	143
Никонов В.И.	80	Соколов В.Ф.	331
Овчинников М.Ю.	261	Солодуша П.Ю.	41
Окунев Ю.М.	318	Солодуша С.В.	47 334
Оморов Р.О.	265	Сомов Е.И.	337 340

Сомов С.Е.	337 340
Сомова Т.Е.	337 340
Стребуляев С.Н.	344
Сухов Е.А.	132
Титов А.Д.	349
Тихонов А.А.	159 244
Ткачева О.С.	166
Ткаченко П.П.	353
Тхай В.Н.	38 356
Ты К.В.	360
Уткин А.В.	203
Федосеев М.С.	363
Фетисов Д.А.	367
Фигурин Т.Ю.	67
Финогенко И.А.	370
Финошин А.В.	373 377
Формальский А.М.	74
Фургат И.Б.	122 380 384
Хлебников М.В.	388
Холостова О.В.	391
Хорошева А.А.	104 394
Хусанов Д.Х.	19
Черкасов О.Ю.	269
Чернов В.А.	397
Черноузько Ф.Л.	394
Честнов В.Н.	401
Шалимова Е.С.	80
Шатов Д.В.	404
Шахова Т.В.	193
Шестаков Р.Д.	207
Щербов Р.М.	237